

Die

Bücher des Apollonius von Perga

de sectione determinata

wiederhergestellt von Robert Simson

und

die angehängten Bücher des letzteren

nach dem Lateinischen frei bearbeitet

von

Dr. W. A. Diesterweg,

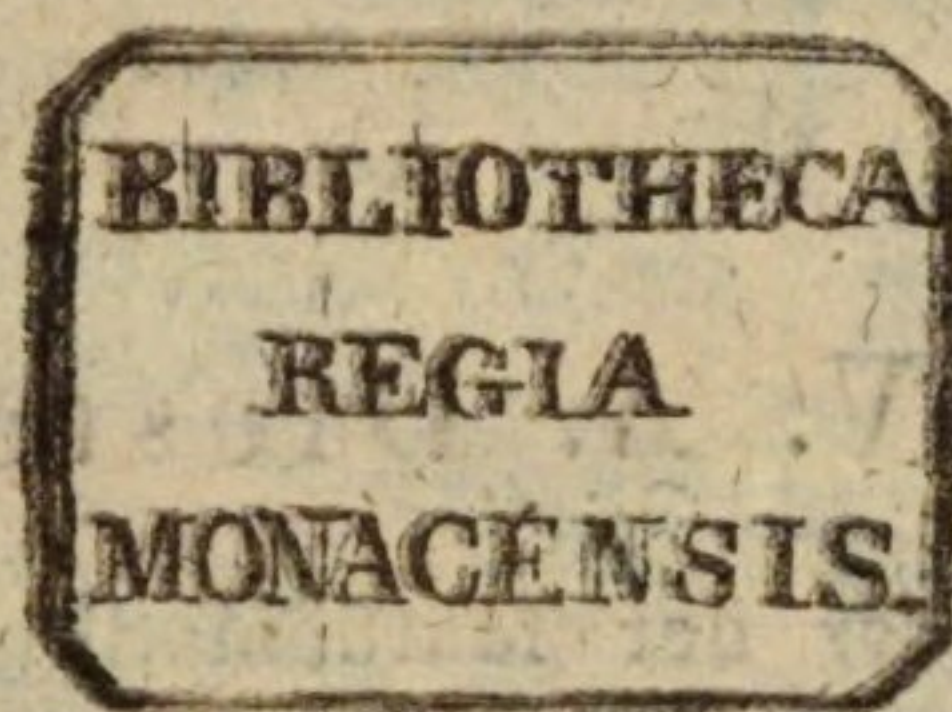
ordentlichem Professor der Mathematik an der königl. preuss.
Rheinuniversität.

Mit 10 Steintafeln.

M a i n z,

bei Florian Kupferberg.

1 8 2 2.



Den Herrn Professoren
von Pfeiderer in Tübingen,
von Bohnenberger in Tübingen,
Hauff in Gent,
Wisseler in Herborn,
seinen verehrtesten Lehrern,

in lebhafter Dankbarkeit gewidmet

vom Verfasser.

V o r r e d e.

Ueber den Werth des Studiums der Schriften der griechischen Geometer ist von alten Zeiten her nur Eine Stimme gewesen.

Unter ihnen hiefs Apollonius von Perga der grofse Geometer. Dafs er diesen Namen verdiente, davon zeugen seine auf uns gekommenen Schriften. Leider sind mehrere der von ihm verfafsten verlohren gegangen. Zu letzteren gehört eine merkwürdige Schrift *περὶ διορισμένης τóμης*, *de sectione determinata*, von welcher Pappus in seinen *collectionibus mathematicis* Nachricht giebt. Sie beschäftigte sich mit der Bestimmung von Punkten in einer geraden Linie, in welcher andere Punkte gegeben sind, so dafs die Quadrate, oder Rechtecke aus den durch die gesuchten und die gegebenen Punkte bestimmten Segmenten, oder aus gegebenen geraden Linien und diesen Segmenten zu den Quadraten, oder Rechtecken aus den übrigen Segmenten gegebene Verhältnisse haben.

Die Nachrichten des Pappus über den Inhalt jener Schrift und die Behandlung dieser Aufgabe in

II

derselben erweckten das Interesse mehrerer Mathematiker. Snellius, Ghetaldus, Giannini versuchten es, eine Wiederherstellung zu liefern. Ihre Arbeiten befriedigen den nicht, welcher mit der griechischen Geometrie vertraut ist. Dagegen lieferte Robert Simson, Professor der Mathematik in Glasgow, eine Wiederherstellung, welche alles übertrifft, was in dieser Art von Divination sich erwarten läßt. Die von Pappus angeführten Hülfsätze sind darin so benutzt, und die Schrift ist so sehr in dem Geiste des Apollonius abgefaßt, daß das Original kaum davon verschieden gewesen seyn kann. Simson fügte noch zwey Bücher über verwandte schwerere Aufgaben hinzu.

Da mich eine mehr als zwölfjährige Erfahrung über den wichtigen Einfluss belehrte, welchen das Studium der geometrischen Werke der Griechen auf die Bildung des mathematischen Sinnes des Jünglings hat, so halte ich in abwechselnder Reihenfolge Vorträge über die Schriften der alten Geometer, vorzüglich über die des Apollonius von Perga. Dadurch entstand in mir der Wunsch, meinen Zuhörern diese Bücher selbst in die Hände geben zu können. Da die nachgelassenen Werke des Robert Simson, in welchen sich die Bücher *de sectione determinata* befinden, in Deutschland sehr selten,

oder nur mit ausserordentlichen Kosten zu haben sind, so entschloß ich mich zuerst zu einer Bearbeitung dieser Bücher. Ich übergebe dem Publicum eine freye Bearbeitung derselben, nicht eine Uebersetzung. Ich habe, ohne mich an das Wort zu halten, das Buch in dem Geiste seines Verfassers wieder zu geben mich bemühet, habe sämtliche Aufgaben der beiden ersten Bücher mit Constructionen versehen, welche Simson nicht gegeben hatte, mir hin und wieder eine andere Anordnung der verschiedenen Fälle einer Aufgabe erlaubt, um sie logischer, oder vollständiger zu machen, habe die Beweise so geführt, daß die Nachweisungen auf die Lehrsätze des Pappus unnöthig wurden, und hin und wieder die Determination auf anderem Wege, als Simson gesucht, und, wie ich glaube, auf einem Wege, welcher leicht zu einem allgemeineren Resultate führte. Man sehe insbesondere die letzten Fälle der Aufgaben des 2. Buches. Zu den Aufgaben dieser Bücher habe ich einige Zusätze hinzugefügt, welche ich von denen des Robert Simson dadurch unterschieden habe, daß letzteren der Name »Simson« beigesetzt, und der Beweis größtentheils nicht gegeben ist. Die Zusätze Simsons beziehen sich vorzüglich auf die Untersuchung, ob andere Punkte, als die durch die Construction gefundenen grössere, oder kleinere Verhältnisse bestimmen, als die gefundenen.

Die Aufgaben der zugefügten Bücher des Robert Simson sind, wie im Originale, auf die Aufgaben der vorhergehenden Bücher reducirt. Sie können jungen Studierenden zu einer vortrefflichen Uebung in der Construction dienen. Vielleicht lasse ich später eine Sammlung von Aufgaben folgen, welche sich auf die Lehren der sämtlichen Bücher gründen. Ich setze dem Buche einen Conspectus voraus, woraus der Reichthum und die Wissenschaftlichkeit der Anordnung erhellet, und welcher das Aufsuchen erleichtert.

Bonn im August 1821.

D i e s t e r w e g.

I n h a l t s a n z e i g e.

Bezeichnet man die in einer geraden Linie gegebenen Punkte mit a, b, c, d , einen gesuchten Punkt mit x , eine gegebene gerade Linie mit h , eine andere mit k , ein gegebenes Verhältniß mit $p : q$, so gewährt folgende Zusammenstellung einen Ueberblick der verschiedenen in nachfolgenden Büchern enthaltenen Aufgaben über die Bestimmung des Punktes x .

- Lib. I. Pr. 1. $ax^2 : bx^2 = p : q$ $\frac{a \quad x \quad b \quad x}{\quad}$
 Pr. 2. Ep. 1. $h \cdot ax : bx^2 = p : q$ $\frac{a \quad x \quad b}{\quad}$
 Ep. 2. Pars 1. $h \cdot bx : ax^2 = p : q$ $\frac{a \quad b \quad x}{\quad}$
 Pars. 2. $h \cdot ax : bx^2 = p : q$ $\frac{a \quad b \quad x}{\quad}$
 Pr. 3. Ep. 1. $h \cdot ax : bx \cdot xc = p : q$ $\frac{a \quad x \quad b \quad c}{\quad}$
 Ep. 2. $h \cdot bx : ax \cdot xc = p : q$
 Ep. 3. $h \cdot cx : ax \cdot xb = p : q$
 Pr. 4. Ep. 1. $h \cdot ax : bx \cdot xc = p : q$ $\frac{a \quad b \quad c \quad x}{\quad}$
 Ep. 2. $h \cdot bx : ax \cdot xc = p : q$
 Ep. 3. $h \cdot cx : ax \cdot xb = p : q$
 Pr. 5. Ep. 1. $ax \cdot xb : cx^2 = p : q$ $\frac{a \quad b \quad x \quad c}{\quad}$
 Ep. 2. $ax \cdot xc : bx^2 = p : q$
 Ep. 3. $bx \cdot xc : ax^2 = p : q$
 Pr. 6. Ep. 1. $ax \cdot xb : cx^2 = p : q$ $\frac{a \quad b \quad c \quad x}{\quad}$
 Ep. 2. $bx \cdot xc : ax^2 = p : q$
 Ep. 3. $ax \cdot xc : bx^2 = p : q$
- Lib. II. Pr. 1. Ep. 1. $ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q$ $\frac{a \quad b \quad x \quad c \quad d}{\quad}$

$$\text{Ep. 2. } ax.xc : bx.xd = p : q$$

$$\text{Ep. 3. } ax.xd : bx.xc = p : q$$

$$\text{Pr. 2. Ep. 1. } ax.xd : bx.xc = p : q \quad \frac{a \quad b \quad c \quad x \quad d}{\quad}$$

$$\text{Ep. 2. } ax.xc : bx.xd = p : q$$

$$\text{Ep. 3. } ax.xb : cx.xd = p : q$$

$$\text{Pr. 3. Ep. 1. } ax.xb : cx.xd = p : q \quad \frac{a \quad b \quad c \quad d \quad x}{\quad}$$

$$\text{Ep. 2. } ax.xc : bx.xd = p : q$$

$$\text{Ep. 3. } ax.xd : bx.xc = p : q$$

$$\text{Lib. III. Pr. I. Ep. 1. P. 1. } ax^2 - k^2 : bx^2 = p : q \quad \frac{a \quad x \quad b}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } ax^2 + k^2 : bx^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - ax^2 : bx^2 = p : q$$

$$\text{Ep. 2. P. 1. } ax^2 - k^2 : bx^2 = p : q \quad \frac{a \quad b \quad x}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } ax^2 + k^2 : bx^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - ax^2 : bx^2 = p : q$$

$$\text{Ep. 3. P. 1. } bx^2 - k^2 : ax^2 = p : q \quad \frac{a \quad b \quad x}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } bx^2 + k^2 : ax^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - bx^2 : ax^2 = p : q$$

$$\text{Pr. II. Ep. 1. P. 1. h. } ax - k^2 : bx^2 = p : q \quad \frac{a \quad x \quad b}{\quad}$$

$$\text{P. 2. h. } ax + k^2 : bx^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - h.ax : bx^2 = p : q$$

$$\text{Ep. 2. P. 1. h. } bx - k^2 : ax^2 = p : q \quad \frac{a \quad b \quad x}{\quad}$$

$$\text{P. 2. h. } bx + k^2 : ax^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - h.bx : ax^2 = p : q$$

$$\text{Ep. 3. P. 1. h. } ax - k^2 : bx^2 = p : q \quad \frac{a \quad b \quad x}{\quad}$$

$$\text{P. 2. h. } ax + k^2 : bx^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - h.ax : bx^2 = p : q$$

$$\text{Pr. III. Ep. 1. P. 1. h. } ax - k^2 : bx.xc = p : q \quad \frac{a \quad x \quad b \quad c}{\quad}$$

$$\text{P. 2. h. } ax + k^2 : bx.xc = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - h.ax : bx.xc = p : q$$

$$\text{Ep. 2. P. 1. h. } bx - k^2 : ax.xc = p : q \quad \frac{a \quad x \quad b \quad c}{\quad}$$

$$\text{P. 2. h. } bx + k^2 : ax.xc = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - h.bx : ax.xc = p : q$$

$$\text{Ep. 3. P. 1. } h.cx - k^2 : bx.xc = p : q \quad \frac{a \quad x \quad b \quad c}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } h.cx + k^2 : bx.xc = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - h.cx : bx.xc = p : q$$

$$\text{Pr. IV. Ep. 1. P. 1. } h.ax - k^2 : bx.xc = p : q \quad \frac{a \quad b \quad c \quad x}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } h.ax + k^2 : bx.xc = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - h.ax : bx.xc = p : q$$

$$\text{Ep. 2. P. 1. } h.bx - k^2 : ax.xc = p : q \quad \frac{a \quad b \quad c \quad x}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } h.bx + k^2 : ax.xc = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - h.bx : ax.xc = p : q$$

$$\text{Ep. 3. P. 1. } h.cx - k^2 : ax.xb = p : q \quad \frac{a \quad b \quad c \quad x}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } h.cx + k^2 : ax.xb = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - h.cx : ax.xb = p : q$$

$$\text{Pr. V. Ep. 1. P. 1. } ax.xb - k^2 : cx^2 = p : q \quad \frac{a \quad b \quad x \quad c}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } ax.xb + k^2 : cx^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - ax.xb : cx^2 = p : q$$

$$\text{Ep. 2. P. 1. } ax.xc - k^2 : bx^2 = p : q \quad \frac{a \quad b \quad x \quad c}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } ax.xc + k^2 : bx^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - ax.xc : bx^2 = p : q$$

$$\text{Ep. 3. P. 1. } bx.xc - k^2 : ax^2 = p : q \quad \frac{a \quad b \quad x \quad c}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } bx.xc + k^2 : ax^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - bx.xc : ax^2 = p : q$$

$$\text{Pr. VI. Ep. 1. P. 1. } ax.xb - k^2 : cx^2 = p : q \quad \frac{a \quad b \quad c \quad x}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } ax.xb + k^2 : cx^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - ax.xb : cx^2 = p : q$$

$$\text{Ep. 2. P. 1. } bx.xc - k^2 : ax^2 = p : q \quad \frac{a \quad b \quad c}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } bx.xc + k^2 : ax^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - bx.xc : ax^2 = p : q$$

$$\text{Ep. 3. P. 1. } ax.xc - k^2 : bx^2 = p : q \quad \frac{a \quad b \quad c \quad x}{\quad}$$

$$\text{P. 2. } ax.xc + k^2 : bx^2 = p : q$$

$$\text{P. 3. } k^2 - ax.xc : bx^2 = p : q$$

Lib. IV. Pr. 1. Ep. 1. P. 1. $ax \cdot xb - k^2 : cx \cdot xd = p : q$ $\frac{a \quad bx \quad cd}{}$

P. 2. $ax \cdot xb + k^2 : cx \cdot xd = p : q$

P. 3. $k^2 - ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q$

Ep. 2. P. 1. $ax \cdot xc - k^2 : bx \cdot xd = p : q$ $\frac{a \quad bx \quad cd}{}$

P. 2. $ax \cdot xc + k^2 : bx \cdot xd = p : q$

P. 3. $k^2 - ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q$

Ep. 3. P. 1. $ax \cdot xd - k^2 : bx \cdot xc = p : q$ $\frac{a \quad bx \quad cd}{}$

P. 2. $ax \cdot xd + k^2 : bx \cdot xc = p : q$

P. 3. $k^2 - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q$

Pr. II. Ep. 1. P. 1. $ax \cdot xd - k^2 : bx \cdot xc = p : q$ $\frac{a \quad x \quad b \quad cd}{}$

P. 2. $ax \cdot xd + k^2 : bx \cdot xc = p : q$

P. 3. $k^2 - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q$

Ep. 2. P. 1. $ax \cdot xc - k^2 : bx \cdot xc = p : q$ $\frac{a \quad x \quad b \quad cd}{}$

P. 2. $ax \cdot xc + k^2 : bx \cdot xc = p : q$

P. 3. $k^2 - ax \cdot xc : bx \cdot xc = p : q$

Ep. 3. P. 1. $ax \cdot xb - k^2 : cx \cdot xd = p : q$ $\frac{a \quad x \quad b \quad cd}{}$

P. 2. $ax \cdot xb + k^2 : cx \cdot xd = p : q$

P. 3. $k^2 - ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q$

Pr. III. Ep. 1. P. 1. $ax \cdot xb - k^2 : cx \cdot xd = p : q$ $\frac{a \quad b \quad c \quad dx}{}$

P. 2. $ax \cdot xb + k^2 : cx \cdot xd = p : q$

P. 3. $k^2 - ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q$

Ep. 2. P. 1. $ax \cdot xc - k^2 : bx \cdot xd = p : q$ $\frac{a \quad b \quad c \quad dx}{}$

P. 2. $ax \cdot xc + k^2 : bx \cdot xd = p : q$

P. 3. $k^2 - ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q$

Ep. 3. P. 1. $ax \cdot xd - k^2 : bx \cdot xd = p : q$ $\frac{a \quad b \quad c \quad dx}{}$

P. 2. $ax \cdot xd + k^2 : bx \cdot xd = p : q$

P. 3. $k^2 - ax \cdot xd : bx \cdot xd = p : q$

Lehnsatz A. Aufgabe. (Fig. 1. 2.)

Auf der Verlängerung einer gegebenen geraden Linie ab einen Punkt anzugeben, so daß das Rechteck, welches aus der Verlängerung und der Summe der gegebenen Linie und der Verlängerung gebildet wird, dem Rechtecke aus zwey gegebenen geraden Linien p, q gleich sey.

Auflösung.

In den Endpunkten der gegebenen ab auf verschiedenen Seiten derselben errichte man Perpendikel auf ab , mache das eine $ac = p$, das andere $bd = q$, und beschreibe über der die Punkte c, d verbindenden geraden Linie cd als Durchmesser einen Kreis. Die Durchschnittspunkte desselben mit der Verlängerung von ab werden das Verlangte leisten.

Beweis.

Bezeichnet man den Durchschnitt der Linien ab, cd mit k , so ist $ac : bd = ak : kb = ck : kd$. Ist nun $p = q$, also auch $ac = bd$ (Fig. 1.), so ist $ak = kb$, $ck = kd$, mithin ist k der Mittelpunkt des über cd als Durchmesser beschriebenen Kreises. Es ist aber $ck > \left\{ \begin{smallmatrix} ka \\ kb \end{smallmatrix} \right\}$ (El. I. 19.) Also schneidet jener Kreis die verlängerte ab . Es geschehe in e, f .

Sind p, q einander nicht gleich, z. E. $p > q$ (Fig. 2.),
 also auch $ac > bd$, so ist $ak > kb$, $ck > kd$,
 mithin liegt der Halbirungspunkt g von cd in ck ,
 der Halbirungspunkt von ab in ak . Zieht man gh ,
 so ist $cg : ah = cd : ab$ (El. V. 15.)
 $= ck : ka$ (El. VI. 2. Cor.)

also ist $gh \perp ac$ (El. VI. 2.)

folglich $gha = R$

$$= ghb$$

mithin $ga = gb$ (El. I. 4.)

Es ist aber $gbd > R$

also ist $gd > \begin{cases} gb \\ ga \end{cases}$ (El. I. 19.)

mithin schneidet der über cd als Durchmesser be-
 schriebene Kreis die Verlängerung von ab . Es ge-
 schehe in e, f .

Verlängert man in beiden Fällen die ca bis zum
 Durchschnitt mit dem Kreise in l , und zieht ld ,
 so ist $cld = R$ (El. III., 31.)
 $= cab$ (Constr.)

also $ab \perp ld$ (El. I. 28.)

Es ist auch $al \perp bd$ (El. I. 27.)

also $bd = al$ (El. I. 34.)

Nun ist $ea, af = ca, al$ (El. III. 35.)

Folglich ist auch $\left. \begin{array}{l} ae \cdot eb \\ af \cdot fb \end{array} \right\} = ca \cdot bd$ (El. III. 3.)
 $= p \cdot q \quad q \cdot e \cdot d.$

Lehnsatz B. Aufgabe. (Fig. 3. 4. 5. 6.)

Eine gegebene gerade Linie ab in zwey Segmente zu theilen, so dafs das aus denselben gebildete Rechteck gleich sey einem aus zwey gegebenen geraden Linien p, q gebildeten.

Auflösung.

In den Punkten a, b errichte man auf der geraden Linie ab an einerlei Seite derselben die Perpendikel af, be , jenes $= p$, dieses $= q$, und beschreibe über der die Punkte f, e verbindenden geraden Linie fe als Durchmesser einen Kreis. Der Punkt, in welchem er der Linie ab begegnet, wird der verlangte seyn.

Determination.

Vermöge Schol. in Eucl. El. II. 5. ed. Pfeiderer mufs, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, seyn $p:q \stackrel{=}{<} \frac{1}{4} ab^2$.

Beweis.

Fällt man von dem Mittelpunkte h des beschriebenen Kreises ein Perpendikel hc auf ab , so ist $ac:cb = fh:he$ (Schol. in Eucl. El. VI. p. 2. §. 30.)

Nun ist $fh = he$

also auch $ac = cb$. Ist nun

$$1) \ p = q, \text{ so ist } p \cdot q = af^2, \text{ mithin } \left. \begin{array}{l} af^2 \\ hc^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \frac{1}{4} ab^2 (\text{Det.}) \\ < ac^2 (\text{Bew.}) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ fh^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ = fh^2 (\text{El. I. 34}) \end{array}$$

also auch $hc^2 \stackrel{=}{<} fh^2$,

folglich berührt der aus h als Mittelpunkt mit hf als Radius beschriebene Kreis die ab in c (Fig. 3), oder

schneidet sie zwischen a, b in m, n (Fig. 4). Da nun $fab = R$, so ist auch $afe = R$ (El. I. 29), folglich ist af eine Tangente jenes Kreises (El. III. 16), mithin ist in dem ersten Falle $af^2 = ac^2$ (El. III. 17. Zus.), also $p^2 = ac \cdot cb$.

c der gesuchte Punkt; in dem zweiten Falle

$$af^2 = ma \cdot an \text{ (El. III. 36)}$$

$$= \begin{cases} am \cdot mb \\ an \cdot nb \end{cases} \text{ (El. III. 3), also sind } m, n$$

Punkte von der verlangten Eigenschaft.

2) Ist nicht $p = q$, sondern z. E. $p < q$ (Fig. 5. 6), und macht man $ag = be$, zieht auch eg , so ist $age = R$ (El. I. 29), also $gfe < R$ (El. I. 17). Zieht man nun feb (El. I. 29)

$hk \pm ab$, so ist $hke = R$ (El. I. 29), folglich $he > hk$; der oft erwähnte Kreis schneidet also die Verlängerung von ek . Es geschehe in d . Zieht man fd , so ist $edf = R$ (El. III. 31.) $= abe$, also $af = bd$ (El. I. 34), mithin $eb \cdot bd = eb \cdot af = p \cdot q$. Nun ist

$$eb \cdot bd + ek^2 = bk^2 \text{ (El. II. 6)}$$

$$= ch^2 \text{ (El. I. 34)}$$

$$\text{Es ist aber } p, q \left. \begin{matrix} \\ eb \cdot b \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 1/4 ab^2 \text{ (Det.)} \\ bc^2 \end{cases}$$

$$\text{also ist } \begin{matrix} bc^2 \\ hk^2 \\ he^2 \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ + ek^2 \end{matrix} \right\} = \begin{cases} eb \cdot bd + ek^2 \\ ch^2 \end{cases}$$

$$\text{Mithin } he. > ch$$

Also berührt der über fe beschriebene Kreis die ab in c (Fig. 5), oder schneidet sie zwischen a, b in m, n (Fig. 6). In jenem Falle ist

$$\left. \begin{array}{l} bc^2 \\ bc.ca \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} eb.bd \text{ (El. III. 36)} \\ p.q \end{array} \right.$$

also ist c der gesuchte Punkt.

$$\text{In diesem Falle ist } \left. \begin{array}{l} mb.bn \\ an.nb \\ am.mb \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} eb.bd \text{ (El. III. 36. Cor.)} \\ p.q \text{ (El. III. 3).} \end{array} \right.$$

Also thun die Punkte m, n der Aufgabe Genüge.

Lehnsatz C. (Fig. 56.)

Wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, b, x, c, d so bestimmt sind, dafs $ax.xc = bx.xd$, so ist für jeden zwischen $\left\{ \begin{array}{l} b, x \\ c, x \end{array} \right\}$ gelegenen Punkt

$$\left\{ \begin{array}{l} g \\ h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ag.gc > bg.gd \\ ah.hc < bh.hd \end{array} \right.$$

Beweis.

Es ist $ax.xc = bx.xd$ (p. hyp.)

$$\begin{aligned} \text{also ist } bx:xc &= ax:xd \text{ (El. VI. 16)} \\ &= ax-xb:dx-xc \text{ (El. V. 5)} \\ &= ab:cd \end{aligned}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} bx+xc \\ bc \end{array} \right\} : cx = ab+cd:dc \text{ (El. V. 18)}$$

$$\text{mithin } bc.cd = (ab+cd) cx \text{ (El. VI. 16)}$$

folglich sowohl

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} (ab+cd)cg - (ab+cd)cx \\ (ab+cd)gx \end{array} \right\} &= (ab+cd)cg - bc.cd \\ &= ab.cg - (bc-cg)cd \\ &= ab.cg - bg.cd \\ &= (ab+bg)gc - (cd+cg)gb \\ &= ag.gc - dg.gb \end{aligned}$$

$$\text{also } ag.gc > dg.gb$$

als auch

$$\begin{aligned}
 ab+cd)cx-(ab+cd)ch &= bc.cd-(ab+cd)ch \\
 (ab+cd)hx &= (bc-ch)cd-ab.ch \\
 &= bh.cd-ab.ch \\
 &= bh(cd+ch)-(ah+bh)hc \\
 &= bh.hd-ah.hc
 \end{aligned}$$

$$\text{also } bh.hd > ah.hc.$$

Der Bücher

de sectione determinata

Erstes.

Der Bücher

de sectione determinata

Erste

Des APOLLONIUS von PERGA

ERSTES BUCH

de sectione determinata.

Aufgabe I. (Fig. 7.)

Auf einer geraden Linie, in welcher zwey Punkte a, b gegeben sind, einen dritten Punkt x zu finden, so daß das Verhältniß der Quadrate der Segmente jener Linie, welche zwischen dem gesuchten Punkte und jenen gegebenen enthalten sind, einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß $ax^2 : bx^2 = p : q$, so ist, da $p : q$ ein gegebenes Verhältniß ist, auch das Verhältniß $ax : xb$ gegeben (Dat. 58*). Es ist aber auch $ax \pm xb = ab$ eine gegebene gerade Linie, je nachdem der Punkt x zwischen a, b , oder auf der Verlängerung von $a b$ liegen soll, also ist sowohl ax , als xb (Dat. 8), somit der Punkt x gegeben.

*) Die Citate der Data des Euklides beziehen sich auf die von Schwab besorgte Ausgabe, Stuttgart 1780.

Construction.

Auf einer unter einem beliebigen Winkel in a an ab gelegten geraden Linie nehme man ad , de in de . Verhältnisse von $p : q$, beschreibe über ae einen Halbkreis, errichte in d auf ad ein Perpendikel df , welches dem Halbkreise in f begegne, mache $dg = df = dh$, ziehe bg , bh , und $dx \perp bg$, $dx' \perp bh$, so sind x , x' die gesuchten Punkte.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } ax : xb &= ad : dg \text{ (El. VI. 2)} \\ &= ad : df \text{ (Constr.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } ax^2 : xb^2 &= ad^2 : df^2 \text{ (El. VI. 22)} \\ &= ad : de \text{ (El. VI. 20. Cor. 2)} \\ &= p : q \text{ (Constr.)} \end{aligned}$$

Für den Punkt x' wird der Beweis eben so geführt.

Zusatz 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Man beschreibe über xx' als Durchmesser einen Halbkreis, dessen Mittelpunkt k sey, und ziehe von a , b an irgend einen Punkt g in dem Umfang desselben gerade Linien ag , gb , ziehe auch kg ;

$$\begin{aligned} \text{so ist } ax : xb &= p : q \\ ax' : x'b &= p : q \end{aligned} \quad \text{(Bew.)}$$

$$\begin{aligned} \text{also } ax : xb &= ax' : x'b \\ &= ax' - ax : bx' - bx \text{ (El. V. 5)} \\ &= 2kx : 2bk \\ &= kx : bk \end{aligned}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{aligned} ax + xk : bx + bk \\ ak : kx \\ ak : kg \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} kx : bk \text{ (El. V. 1)} \\ gk : kb \end{aligned} \right.$$

Es ist auch $akg = gkb$

$$\text{mithin } ag:gb = gk:kb \text{ (El. VI. 6)} \\ = p:q$$

Es ist also das Verhältniß der Entfernungen irgend eines Punktes in dem Umfang jenes Halbkreises von den gegebenen Punkten a, b ein constantes. Siehe Apollonius über die ebenen Oerter, wiederhergestellt von R. Simson, übersetzt von Camerer, Leipzig 1796. pag. 211. fq.

Aufgabe II. (Fig. 8. 9. 10. 11.)

Auf einer geraden Linie, in welcher zwey Punkte a, b gegeben sind, einen dritten Punkt x anzugeben, so daß das Verhältniß des Rechtecks aus einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie d in das Segment zwischen x und einem jener Punkte zu dem Quadrate des anderen Segmentes einem gegebenen Verhältnisse $p:q$ gleich sey.

Fall I. (Fig. 8.)

Der gesuchte Punkt soll zwischen a, b liegen.

Analysis.

Man nehme an, x sey der gesuchte Punkt, so daß also $d \cdot ax:bx^2 = p:q$. Man suche die vierte geometrische Proportionallinie zu p, q, d , und schneide von der Verlängerung von ab eine gerade Linie be gleich derselben ab . Alsdann ist

$$d \cdot ax:bx^2 = d:be$$

$$= d \cdot ax:be \cdot ax \text{ (El. VI. 1)}$$

$$\text{folglich } bx^2 = \frac{d \cdot ax}{be}$$

$$\text{mithin auch } ax:xb = xb:bc \text{ (El. VI. 17)}$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} ax+xb \\ ab \end{array} \right\} : bx = \left\{ \begin{array}{l} xb+be \\ xe \end{array} \right\} : eb \text{ (El. V. 18)}$$

$$\text{also } ab \cdot be = bx \cdot xe \text{ (El. VI. 16).}$$

Es sind aber ab, be gegeben (hyp. u. Dat. 2), also ist $ab.be$ gegeben, mithin ist auch $bx.xe$ gegeben. Es ist aber $xe - xb = be$ gegeben, folglich bx (Dat. 85) und somit der Punkt x gegeben.

Construction.

Man errichte in b auf ab ein Perpendikel, nehme auf demselben zu verschiedenen Seiten $bp = p$, $bq = q$, mache $bh = d$, ziehe ph und $qe \perp ph$, errichte in e ein Perpendikel ef , nehme $ef = be$, $bg = ba$, und beschreibe über fg als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnittspunkt x desselben mit ab wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } ex.xb &= ef.bg \text{ (Lehnsatz A.)} \\ &= eb.ba \text{ (Constr.)} \end{aligned}$$

$$\text{folglich ist } ab:bx = xe:eb$$

$$\text{Es ist aber } xe > eb \text{ (Lehns. A.)}$$

$$\begin{aligned} \text{mithin auch } ab > bx, \text{ also liegt der Punkt } x \text{ zwischen} \\ a, b. \text{ Ferner ist } ab - bx \} : xb = \left\{ \begin{array}{l} xe - eb \\ xb \end{array} \right\} : be \end{aligned}$$

$$\text{folglich } ax.be = bx^2$$

$$\begin{aligned} \text{mithin auch } d.ax:bx^2 &= d.ax:ax.be \\ &= d:be \\ &= p:q \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte bestimmen kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y des Kreises mit der Verlängerung der geraden Linie ab

hat man $by \cdot ye = bg \cdot ef$ (Lehns. A.)

$= ab \cdot be$ (Constr.)

folglich $ab:by = ye:eb$

mithin auch $\frac{ab+by}{ay} : yb = \frac{ye+eb}{by} : be$

also $ay \cdot be = by^2$

demnach $d \cdot ay : by^2 = d \cdot ay : ay \cdot be$

$= d : be$

$= p : q$

Es ist also auch in der Verlängerung von ab ein Punkt y gefunden worden, so daß $d \cdot ay : by^2 = p : q$, welches Buch 1. Aufg. II. Fall 2. b. ist.

Zus. 3. Da $d \cdot ax : bx^2 = p : q$

und $d \cdot ay : by^2 = p : q$

so ist auch $d \cdot ax : bx^2 = d \cdot ay : by^2$

folglich $\frac{d \cdot ax : d \cdot ay}{ax : ay} = bx^2 : by^2$

und es läßt sich die Aufgabe auflösen: wenn die Punkte a, b, y gegeben sind, einen Punkt x zwischen a, b zu finden, so daß $ax : ay = bx^2 : by^2$.

Fall 2. (Fig. 9. 10. 11.)

Der gesuchte Punkt x soll auf der Verlängerung von ab liegen, und es soll seyn

a) $d \cdot bx : ax^2 = p : q$ (Fig. 9. 10).

Analysis.

Man nehme an, x sey der gesuchte Punkt, construiere die vierte geometrische Proportionallinie zu p, q, d , und

schneide von der gegebenen Linie von a an eine jener gleiche gerade Linie a e ab, so dafs also

$$\begin{aligned} d.bx:ax^2 &= d:ae \\ &= d.bx:bx.ae \end{aligned}$$

$$\text{folglich } ax^2 = bx.ae$$

$$\text{mithin auch } bx:xa = ax:ae$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} ax - xb \\ ab \end{array} \right\} : ax = \left\{ \begin{array}{l} ea - ax \\ ex \end{array} \right\} : ae$$

$$\text{also } ba.ae = ax.xe.$$

Es sind aber ba (hyp.) und ae (Dat. 2.) gegeben, also ist auch ba.ae, und somit ax.xe gegeben. Auch ist ax+xe = ae gegeben, folglich (Dat. 86) ax, xe und der Punkt x gegeben.

Determination.

$$\text{Vermöge El. II. 5. mufs seyn } ba.ae \stackrel{=}{<} \frac{1}{4} ae^2$$

$$\text{folglich } ba \stackrel{=}{<} \frac{1}{4} ae$$

$$\text{Es ist aber } p:q = d:ae$$

$$\text{mithin auch } p:\frac{1}{4}q = d:\frac{1}{4}ae$$

$$\text{also mufs seyn } p:\frac{1}{4}q \stackrel{=}{<} d:ab$$

$$\text{und auch } p:q \stackrel{=}{<} d:4ab$$

Construction.

Man verlängere ab nach beiden Seiten, nehme ad = d, errichte in a auf ab ein Perpendikel, mache zu verschiedenen Seiten desselben ap = p, aq = q, ziehe dp, und qe $\perp$ dp, errichte in e ein Perpendikel = ea, mache auch ag = ab, und beschreibe über der

die Punkte g, f verbindenden geraden Linie gf als Durchmesser einen Kreis. Derselbe wird der gegebenen Linie in dem gesuchten Punkte begegnen.

Beweis.

Es ist $p:q = d:4ab$ (Determin.)

also auch $p:\frac{1}{4}q = d:ab$

Es ist aber $p:q = d:ae$

folglich $p:\frac{1}{4}q = d:\frac{1}{4}ae$

mithin $d:\frac{1}{4}ae = d:ab$

also $\frac{1}{4}ae = ab$

und auch $\frac{1}{4}ae^2 = \begin{cases} ba \cdot ae \\ ef \cdot ag \end{cases}$

also berührt der über gf als Durchmesser beschriebene Kreis die ae in ihrem Halbirungspunkte x, (Fig. 9), oder schneidet sie zwischen a, e in zwey Punkten x, y (Fig. 10) (Lehnsatz B). In dem ersten Falle ist

$$ax^2 = \begin{cases} ag \cdot ef \\ ba \cdot ae \end{cases}$$

folglich $ba:ax = xa:ae$

Es ist aber $xa < ae$

folglich auch $ba < ax$. Es liegt also x auf der Verlängerung von a b.

Ferner ist $xa-ab:ax = \begin{cases} ea-ax \\ ex \\ ax \end{cases} : ae$

mithin $ax^2 = bx \cdot ae$

also auch $d \cdot bx:ax^2 = d \cdot bx:bx \cdot ae$
 $= d:ae$
 $= p:q$

In dem zweiten Falle ist $ax \cdot xe = ag \cdot ef$
 $= ba \cdot ae$

folglich $ba : ax = xe : ea$

Es ist aber $xe < ea$ (Lehns. B)

also auch $ba < ax$; es liegt also
 x auf der Verlängerung von ba .

Ferner ist $\frac{ax - ba}{bx} : ax = \frac{ea - xe}{ax} : ea$

folglich $ax^2 = bx \cdot ea$

mithin $d \cdot bx : ax^2 = d \cdot bx : bx \cdot ea$

$= d : ea$

$= p : q$

Eben so wird der Beweis für y geführt.

Zus. 1. (Sims.) Das Verhältniss, welches durch den Halbirungspunkt von ae bestimmt wird, ist grösser, als jedes andere durch einen auf be oder ihrer Verlängerung über e hinaus gelegenen Punkt bestimmte. Die dem Halbirungspunkte näher liegenden Punkte der ae auf einerley Seite des Halbirungspunktes bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren. Es kann aber der von zwey auf verschiedenen Seiten des Halbirungspunktes gelegenen Punkten dem Halbirungspunkte näher liegende Punkt ein kleineres Verhältniss bestimmen, als der entferntere.

Zus. 2. Es ist (Fig. 10) $d \cdot bx : ax^2 = p : q$

und $d \cdot by : ay^2 = p : q$

folglich $d \cdot bx : ax^2 = d \cdot by : ay^2$

mithin $\left. \begin{array}{l} d \cdot bx : d \cdot by \\ \text{oder } bx : by \end{array} \right\} = ax^2 : ay^2$

Und es läßt sich, wenn die Punkte a, b, y gegeben sind, der Punkt x auf der Verlängerung von ab finden, so daß $bx : by = ax^2 : ay^2$.

b) Es soll werden $d \cdot ax : bx^2 = p : q$. (Fig. 11).

Analysis.

Es sey x der gesuchte Punkt. Man suche die vierte geometrische Proportionallinie zu p, q, d , und trage eine ihr gleiche gerade Linie be auf die Verlängerung von ab . Alsdann ist

$$\begin{aligned} d \cdot ax : bx^2 &= d : be \\ &= d \cdot ax : ax \cdot be \end{aligned}$$

$$\text{folglich } bx^2 = ax \cdot be$$

$$\text{mithin } ax : xb = bx : be$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ax - xb \\ ab \end{array} \right\} : bx = \left\{ \begin{array}{l} xb - be \\ ex \end{array} \right\} : eb$$

$$\text{folglich } ab \cdot be = bx \cdot xe.$$

Nun sind ab (hyp.), be (Dat. 2) gegeben, also ist auch $ab \cdot be$, folglich auch $bx \cdot xe$ gegeben. Nun ist $bx - xe = be$ gegeben, also (Dat. 85) auch bx, xe und der Punkt x .

Construction.

Man errichte in b auf ab ein Perpendikel, nehme auf demselben zu verschiedenen Seiten $bp = p, bq = q$, schneide von ba ab $bd = d$, ziehe dp und $qe \perp dp$, errichte in e auf ae ein Perpendikel, nehme auf verschiedenen Seiten von ae die Linie $bg = ba, ef = eb$, ziehe gf und beschreibe über gf als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ae in dem gesuchten Punkte x schneiden wird.

B e w e i s.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } bx \cdot xe &= bg \cdot ef \text{ (Lehns. A.)} \\ &= ba \cdot eb \end{aligned}$$

$$\text{folglich } ab : bx = xe : eb$$

$$\text{also } ab + bx \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} : xb = \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} xe + eb \\ bx \end{matrix} : be$$

$$\text{mithin } bx^2 = ax \cdot be$$

$$\begin{aligned} \text{also } d \cdot ax : bx^2 &= d \cdot ax : ax \cdot be \\ &= d : be \\ &= p : q \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegen, den Punkte, als x , bestimmen grössere, die entfernteren kleinere Verhältnisse.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y des Kreises mit der verlängerten eb hat man

$$\begin{aligned} by \cdot ye &= bg \cdot ef \text{ (Lehns. A.)} \\ &= ba \cdot eb \end{aligned}$$

$$\text{also } ab : by = ye : eb.$$

$$\text{Es ist aber } ye > eb$$

$$\text{also } ab > by$$

Mithin liegt y zwischen a , b , und es ist ferner

$$ab - by \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} : yb = \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} ye - eb \\ by \end{matrix} : be$$

$$\text{daher auch } by^2 = ay \cdot be$$

$$\begin{aligned} \text{und } d \cdot ay : by^2 &= d \cdot ay : ay \cdot be \\ &= d : be \\ &= p : q \end{aligned}$$

welches Buch 1. Auf. II. Fall 1. ist.

Zus. 3. Es ist $d \cdot ax : bx^2 = p : q$
und $d \cdot ay : by^2 = p : q$

$$\text{also } d \cdot ax : bx^2 = d \cdot ay : by^2$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} d \cdot ax : d \cdot ay \\ ax : ay \end{array} \right\} = bx^2 : by^2$$

und es läßt sich die Aufgabe auflösen; auf der Verlängerung der geraden Linie ab , in welcher die Punkte a, y, b gegeben sind, einen vierten Punkt x zu finden, so daß $ax : ay = bx^2 : by^2$.

Aufgabe III. (Fig. 12—20).

Auf einer geraden Linie, in welcher drey Punkte a, b, c gegeben sind, einen vierten x zwischen zweyen derselben zu finden, so daß das Verhältniß des Rechteckes aus einer gegebenen geraden Linie d in das Segment zwischen x und einem der gegebenen Punkte zu dem Rechtecke aus den übrigen Segmenten einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 12. 13. 14. 15.)

Der gesuchte Punkt soll zwischen a, b so gefunden werden, daß $d \cdot ax : bx \cdot xc = p : q$.

Analysis. (Fig. 12.)

Es sey der gesuchte Punkt x . Man gedenke sich die vierte geometrische Proportionallinie zu p, q, d gesucht und von b an auf die Verlängerung von ab eine ihr gleiche gerade Linie be gelegt. So ist

$$\begin{aligned} d.ax:bx.xc &= d:be \\ &= d.ax:be.ax \end{aligned}$$

$$\text{also } bx.xc = be.ax$$

$$\text{folglich } ax:xc = bx:be$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} ax+xc \\ ac \end{array} \right\} : cx = \left\{ \begin{array}{l} xb+be \\ xe \end{array} \right\} : eb$$

$$\text{mithin } ac.be = cx.xe$$

Nun sind ac (hyp.), be (Dat. 2) gegeben, also ist auch $ac.be$ gegeben, mithin auch $cx.xe$ gegeben. Es ist aber auch $\left. \begin{array}{l} ex-cx \\ \text{oder } cx-ex \end{array} \right\}$ gegeben, also ist cx

(Dat. 85), und somit der Punkt x gegeben.

Construction. (Fig. 13. 14. 15.)

Von dem durch b gelegten Perpendikel auf ab schneide man auf verschiedenen Seiten $bp=p$, $bq=q$, von ba oder ihrer Verlängerung $bd=d$ ab, ziehe dp und $qe \perp dp$. Von den auf verschiedenen Seiten von eb durch b , e gezogenen Perpendikeln auf be schneide man $ef=eb$, $cg=ca$ ab, und beschreibe über der Verknüpfungslinie fg als Durchmesser einen Kreis. Derselbe wird ab in dem gesuchten Punkte x schneiden.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } cx.xe &= cg.ef \text{ (Lehns. A.)} \\ &= ca.eb \end{aligned}$$

$$\text{also } ac:cx = xe:eb$$

Nun ist sowohl $be < ea$, als auch $ac > cb$

$$\text{mithin sowohl } \left. \begin{array}{l} ca.eb \\ cx.xe \end{array} \right\} < \begin{array}{l} ca.ae, \text{ als auch } ca.eb \\ cx.xe \end{array} \left. \right\} > cb.be$$

also sowohl $cx < ca$, als auch $cx > cb$
folglich liegt der Punkt x zwischen a , b .

$$\text{Ferner ist } \frac{ac-cx}{ax} : xc = \frac{xe-eb}{bx} : be$$

$$\text{also } \underline{bx \cdot xc = ax \cdot be}$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } d.ax : bx \cdot xc &= d.ax : ax \cdot be \\ &= d : be \\ &= p : q \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte a näher liegenden Punkte der ab bestimmen kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y des Kreises mit ac in ihrer Verlängerung ist

$$\begin{aligned} ey \cdot yc &= ef \cdot cg \text{ (Lehns. A.)} \\ &= ac \cdot eb \end{aligned}$$

$$\text{also } \underline{ac : ey = cy : eb}$$

$$\text{und } \frac{ac+cy}{ay} : \frac{ye+eb}{by} = cy : eb$$

$$\text{folglich } \underline{ay \cdot eb = by \cdot yc}$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } d.ay : by \cdot yc &= d.ay : ay \cdot eb \\ &= d : eb \\ &= p : q \end{aligned}$$

welches Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. ist.

$$\text{Zus. 3. Es ist also } \underline{d.ax : bx \cdot xc = d.ay : by \cdot yc}$$

$$\text{folglich } \frac{d.ax : d.ay}{ax : ay} = bx \cdot xc : by \cdot yc$$

und es läßt sich die Aufgabe auflösen: auf einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, y gegeben sind, zwischen a, b einen fünften x zu bestimmen, so daß $ax : ay = bx \cdot xc : by \cdot yc$.

Fall. 2. (Fig. 16. 17.)

Der gesuchte Punkt soll zwischen a, b liegen, so dafs $d.bx:ax.xc = p:q$.

Analysis.

Es sey x der gesuchte Punkt, so dafs also

$$d.bx:ax.xc = p:q$$

Man gedenke sich eine gerade Linie ae gleich der vierten geometrischen Proportionallinie zu p, q, d von a aus auf a c getragen, so ist

$$d.bx:ax.xc = d:ae.$$

$$= d.bx:ae.bx$$

$$\text{folglich } ax.xc = ae.bx$$

$$\text{mithin } cx:ae = bx:ax$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} cx - bx \\ bc \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} ae - ax \\ ex \end{array} \right\} = cx:ae$$

$$\text{also } ae.bc = cx.xe$$

Es sind aber ae (Dat. 2), bc (hyp.) gegeben, also ist auch ae.bc, somit cx.xe gegeben. Nun ist auch cx-xe, oder ex-cx=ce gegeben, folglich ist cx (Dat. 85), also auch der Punkt x gegeben.

Construction.

Auf der Verlängerung von ba nehme man ad=d, von dem durch a gelegten Perpendikel auf ab schneide man zu verschiedenen Seiten ap=p, aq=q ab, ziehe dp, und qe $\perp$ dp, lege durch e, c die auf ac zu verschiedenen Seiten perpendicular stehenden geraden Linien ef, cg, mache ef=ea, cg=cb und beschreibe über der Verbindungslinie gf als Durchmesser einen Kreis. Dieser wird die ab in dem gesuchten Punkte schneiden.

Aufgabe III.

27

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } ex \cdot xc &= ef \cdot cg \text{ (Lehns, A.)} \\ &= ae \cdot cb \end{aligned}$$

$$\text{folglich } bc:ex = cx:ae.$$

$$\text{Nun ist } bc < ca$$

$$\begin{aligned} \text{also } ae \cdot bc &\} < ca \cdot ae \\ ex \cdot xc &\} \end{aligned}$$

$$\text{folglich } ex < ea$$

$$\text{also auch } bc < cx$$

Mithin liegt der Punkt x zwischen a, b. Ferner ist

$$\begin{aligned} cx - cb &\} : \{ ae - ex \\ bx &\} \{ ax \end{aligned} = cx:ae$$

$$\text{also } ae \cdot bx = ax \cdot xc$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } d \cdot bx:ax \cdot xc &= d \cdot bx:ae \cdot bx \\ &= d:ae \\ &= p:q \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte a näher liegenden Punkte der ab bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten ac ist

$$\begin{aligned} ey \cdot yc &= ef \cdot cg \\ &= ae \cdot cb \end{aligned}$$

$$\text{also } cy:ae = bc:ey$$

$$\begin{aligned} \text{und } cy + cb &\} : \{ ae + ey \\ by &\} \{ ay \end{aligned} = yc:ae$$

$$\text{mithin } ae \cdot by = ay \cdot yc$$

$$\begin{aligned} \text{also auch } d \cdot by:ay \cdot yc &= d \cdot by:ae \cdot by \\ &= d:ae \\ &= p:q \end{aligned}$$

welches Buch 1. Aufg. IV. Fall 2. ist.

Zus. 3. Es ist also $d.bx:ax.xc = d.by:ay.yc$

$$\text{folglich } \frac{d.bx:d.by}{bx:by} = ax.xc:ay.yc$$

Und es läßt sich, wenn in einer geraden Linie vier Punkte a, b, c, y gegeben sind, ein fünfter x zwischen a, b finden, so daß $bx:by = ax.xc:ay.yc$

Fall 3. (Fig. 18. 19. 20.)

Der gesuchte Punkt soll zwischen a, b liegen, so daß $d.cx:ax.xc = p:q$.

Analysis.

Es sey x der gesuchte Punkt, und man gedenke sich von a aus auf ab eine Linie ae gleich der vierten geometrischen Proportionallinie zu p, q, d getragen; so ist also $d.cx:ax.xb = d:ae$

$$= d.cx:ae.cx$$

$$\text{folglich } ax.xb = ae.cx$$

$$\text{also } cx:xb = ax:ae$$

$$\text{und } \frac{cx-xb}{bc} : bx = \frac{ax-ae}{ex} : ea$$

$$\text{mithin } bx.xe = ae.bc.$$

Es sind aber bc (hyp.), ae (Dat. 2) gegeben, also ist auch $ae.bc$, somit $bx.xe$ gegeben. Es ist aber auch $bx+xe = be$ gegeben, folglich ist (Dat. 86) bx , somit der Punkt x gegeben.

Determination.

Zufolge El. II. 5. muß seyn

$$ae \cdot bc = \begin{cases} \frac{1}{4} be^2 \\ < bh^2, \text{ wenn } be \text{ in } h \text{ halbart} \end{cases} \text{ wird,}$$

$$\text{also } \begin{cases} ae \cdot bc + ec \cdot bc \\ ac \cdot cb \end{cases} = \begin{cases} bh^2 + ec \cdot cb \\ < ch^2 \end{cases} \quad (\text{El. II. 6}).$$

$$\text{und } 2\sqrt{ac \cdot cb} = \begin{cases} 2ch \\ < ce + cb \end{cases}$$

$$\text{folglich auch } ac + cb - 2\sqrt{ac \cdot cb} = \begin{cases} ac + cb - ce - cb \\ > ae \end{cases}$$

$$\text{mithin } \begin{cases} d:ae \\ p:q \end{cases} = \begin{cases} d:ac + cb - 2\sqrt{ac \cdot cb} \\ > \end{cases}$$

Construction.

Auf der Verlängerung von ba nehme man $ad = d$, von einem durch a auf ab gelegten Perpendikel schneide man $ap = p$, $aq = q$ ab , ziehe dp und $qe \perp dp$; in e , b errichte man zu einerley Seite von ab Perpendikel auf dieser Linie, nehme $ef = ea$, $bg = bc$, und beschreibe über der geraden Linie fg als Durchmesser einen Kreis. Derselbe wird der ab in dem gesuchten Punkte x begegnen.

Beweis.

$$\text{Es ist } \begin{cases} p:q \\ d:ae \end{cases} = \begin{cases} d:ac + cb - 2\sqrt{ac \cdot cb} \\ > \end{cases}$$

$$\text{folglich ist } \begin{cases} ae \\ ac - ce \\ ac + cb - ce - cb \end{cases} = \begin{cases} ac + cb - 2\sqrt{ac \cdot cb} \\ < \end{cases}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ce+cb \\ 2ch \end{array} \right\} = 2\sqrt{ac.cb}$$

$$\text{folglich } ch \geq \sqrt{ac.cb}$$

$$\text{und } ch^2 \geq ac.cb$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} ch^2 - ec.cb \\ bh^2 \\ \frac{1}{4}be^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} ac.cb \\ ec.cb \\ ae.cb. \end{array} \right.$$

Also berührt, oder schneidet der über fg beschriebene Kreis die Linie be (Lehns. B.).

Im ersten Fall (Fig. 19) ist

$$\begin{aligned} bh^2 &= ef.bg \text{ (Lehns. B.)} \\ &= ae.bc \end{aligned}$$

$$\text{also } cb:bh = hb:ae$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} cb+bh \\ ch \end{array} \right\} : hb = \left\{ \begin{array}{l} hb+ae \\ ah \end{array} \right\} : ae$$

$$\text{folglich } ae.ch = ah.hb$$

$$\text{also auch } d.ch:ah.hb = d.ch:ae.ch$$

$$= d:ae$$

$$= p:q$$

Im zweiten Fall (Fig. 20) ist $bx.xe = ef.bg$

$$= ae.bc$$

$$\text{also } cb:bx = xe:ae$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} cb+bx \\ cx \end{array} \right\} : xb = \left\{ \begin{array}{l} xe+ea \\ ax \end{array} \right\} : ae$$

$$\text{folglich } ax.xb = cx.ae$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } d.cx:ax.xb &= d.cx:cx.ae \\ &= d:ae \\ &= p:q \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Der Halbirungspunkt h der Linie ae bestimmt ein kleineres Verhältniß, als jeder andere zwischen a, b gelegene Punkt. Von zwey auf derselben Seite des Halbirungspunktes zwischen a, b gelegenen Punkten bestimmt der nähere ein kleineres Verhältniß, als der entferntere.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y des Kreises mit be ist $by.ye = ef.bg$
 $= ae.bc$

$$\text{also } cb:by = ye:ae$$

$$\text{und } \frac{cb+by}{cy} : yb = \frac{ye+ae}{ay} : ea$$

$$\text{folglich } ay.yb = ae.cy$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } d.cy:ay.yb &= d.cy:ae.cy \\ &= d:ae \\ &= p:q \end{aligned}$$

Zus. 3. Es ist also $d.cx:ax.xb = d.cy:ay.yb$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} d.cx:d.cy \\ cx:cy \end{array} \right\} = ax.xb:ay.yb.$$

Es läßt sich also auf einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, y gegeben sind, zwischen a, b ein fünfter x finden, so daß

$$cx:cy = ax.xb:ay.yb.$$

Aufgabe IV. (Fig. 21—27.)

Auf der Verlängerung einer geraden Linie, in welcher drey Punkte a, b, c gegeben sind, einen

vierten Punkt x zu finden, so daß das Verhältniß des Rechteckes aus einer gegebenen geraden Linie d in das Segment zwischen x und einem der gegebenen Punkte zu dem Rechtecke aus den Segmenten zwischen x und den anderen Punkten einem gegebenen Verhältnisse $p:q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 21. 22.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daß $d.ax:bx.xc = p:q$.

A n a l y s i s.

Der gesuchte Punkt sey x , und die Linie be sey so bestimmt, daß $p:q = d:be$; so ist

$$\begin{aligned} d.ax:bx.xc &= d:be \\ &= d.ax:be.ax \end{aligned}$$

$$\text{also } bx.xc = be.ax$$

$$\text{folglich } ax:xc = bx:be$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} ax-xc \\ ac \end{array} \right\} : cx = \left\{ \begin{array}{l} bx-be \\ ex \end{array} \right\} : eb$$

$$\text{mithin } ac.be = cx.xe$$

Nun sind ac (hyp.), be (Dat. 2) gegeben, folglich ist auch $ac.be$, somit $cx.xe$ gegeben. Es ist aber auch $cx-xe = ce$, oder $ex-cx = ce$ gegeben, je

nachdem $be = bc$, folglich ist auch cx (Dat. 85)

und der Punkt x gegeben.

C o n s t r u c t i o n.

Man mache $bd = d$, $abd = abq = R$, $bp = p$, $bq = q$, $eq \perp dp$, $ecg = R = cef$, $cg = ca$, $ef = eb$, und beschreibe über fg als Durchmesser einen Kreis.

Der Durchschnitt desselben mit der verlängerten ac wird der gesuchte Punkt seyn.

Beweis.

Es ist $cx \cdot xe = cg \cdot ef$ (Lehns. A.)

$$= ac \cdot be$$

$$\text{also } ac:cx = xe:eb$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} ac+cx \\ ax \end{array} \right\} : xc = \left\{ \begin{array}{l} xe+eb \\ bx \end{array} \right\} : be$$

$$\text{folglich } bx \cdot xc = ax \cdot be$$

$$\text{mithin } d \cdot ax : bx \cdot xc = d \cdot ax : ax \cdot be$$

$$= d : be$$

$$= p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden Punkte der verlängerten ac bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit ac hat man $cy \cdot ye = cg \cdot ef$ (Lehns. A.)

$$= ac \cdot be$$

Es ist aber sowohl $ca:ae > ca:be$, als $cb:be < ac:be$

folglich ist auch $ca \cdot ae > cy \cdot ye$, und $cb \cdot be < cy \cdot ye$

mithin $ca > cy$, und $cb < cy$.

Es liegt also der Punkt y zwischen a, b , und man hat ferner $ac:cy = ye:eb$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} ac-cy \\ ay \end{array} \right\} : yc = \left\{ \begin{array}{l} ye-eb \\ by \end{array} \right\} : be$$

$$\text{also } by \cdot yc = ay \cdot be.$$

folglich $d.ay:by.yc = d.ay:ay.be$

$$= d:be$$

$$= p:q$$

welches Buch 1. Aufg. III. Fall 1 ist.

Zus. 3. Es ist also $d.ax:bx.xc = d.ay:by.yc$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} d.ax:d.ay \\ ax:ay \end{array} \right\} = bx.xc:by.yc$$

Und man kann, wenn auf einer geraden Linie vier Punkte a, y, b, c gegeben sind, auf der Verlängerung von ac einen fünften x finden, so daß

$$ax:ay = bx.xc:by.yc.$$

Fall 2. (Fig. 23. 24.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daß

$$d.bx:ax.xc = p:q.$$

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x, und es sey $p:q = d:ae$,

so ist $d.bx:ax.xc = d:ae$

$$= d.bx:ae.bx$$

$$\text{also } ax.xc = ae.bx$$

$$\text{folglich } bx:xc = ax:ae$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} bx-xc \\ bc \end{array} \right\} : cx = \left\{ \begin{array}{l} ax-ae \\ ex \end{array} \right\} : ea$$

$$\text{mithin } cx.xe = bc.ae$$

Nun sind bc (hyp.), ae (Dat. 2) gegeben, also ist auch bc.ae, somit cx.xe gegeben. Es ist aber auch $ce = cx - xe$, oder $ce = ex - xc$ gegeben, je nachdem

$ae > ac$, folglich ist cx (Dat. 85), somit der Punkt x
 $ae < ac$
 gegeben.

Construction.

Man mache $ad = d$, $dap = R = daq$, $ap = p$,
 $aq = q$, $eq \perp dp$, $bcg = R = cef$, $cg = cb$, $ef = ea$,
 und beschreibe über fg als Durchmesser einen Kreis.
 Der Durchschnitt desselben mit der verlängerten ac
 wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } cx \cdot xe = cg \cdot ef \text{ (Lehns, A.)} \\ = cb \cdot ea$$

$$\text{also } \frac{bc}{cx} = \frac{xe}{ea}$$

$$\text{und } \left. \begin{matrix} bc+cx \\ bx \end{matrix} \right\} : xc = \left. \begin{matrix} xe+ea \\ ax \end{matrix} \right\} : ae$$

$$\text{folglich } ax \cdot xc = ae \cdot bx$$

$$\text{mithin } d \cdot bx : ax \cdot xc = d \cdot bx : ae \cdot bx \\ = d : ae \\ = p : q$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden
 Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die ent-
 fernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y
 des Kreises mit ab hat man $cy \cdot ye = cg \cdot ef$
 $= ae \cdot bc$

Es ist aber sowohl $ae \cdot bc > eb \cdot bc$, als $ae \cdot bc < ea \cdot ac$

folglich ist auch $cy \cdot ye > cb \cdot be$ und $cy \cdot ye < ea \cdot ac$

$$\text{mithin } cy > cb \text{ und } cy < ca$$

Der Punkt y liegt also zwischen a , b .

Ferner ist $yc : cb = ae : ey$

$$\text{folglich } \left. \begin{matrix} yc-cb \\ by \end{matrix} \right\} : cy = \left. \begin{matrix} ae-ey \\ ay \end{matrix} \right\} : ae$$

$$\text{also } ay.yc = ae.by$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } d.by:ay.yc &= d.by:ae.by \\ &= d:ae \\ &= p:q \end{aligned}$$

welches Buch 1. Aufgabe III. Fall 2. ist.

Zus. 3. Es ist also $d.bx:ax.xc = d.by:ay.yc$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} d.bx:d.by \\ bx:by \end{array} \right\} = ax.xc:ay.yc$$

und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie vier Punkte a, y, b, c gegeben sind, auf der Verlängerung derselben ein fünfter x finden, so daß

$$bx:by = ax.xc:ay.yc.$$

Fall 3. (Fig. 25. 26. 27.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daß $d.cx:ax.xb = p:q$.

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x, und es sey $p:q = d:ae$, so ist $d.cx:ax.xb = d:ae$.

$$= d.cx:ae.cx$$

$$\text{also } ax.xb = ae.cx$$

$$\text{folglich } bx:xc = ea:ax$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} bx-xc \\ bc \end{array} \right\} : bx = \left\{ \begin{array}{l} ea-ax \\ ex \end{array} \right\} : ae$$

$$\text{mithin } bx.xe = bc.ae$$

Es sind aber bc (hyp.), ae (Dat. 2) gegeben, also ist auch bc.ae, somit bx.xe gegeben. Es ist aber auch $bx+xe = ae-ab = eb$ gegeben, folglich ist bx (Dat. 86), somit der Punkt x gegeben.

Determination.

Zufolge El. II. 5 muß seyn $bc \cdot ae = \begin{cases} \frac{1}{4} b e^2 \\ < \{ b h^2, \text{ wenn } bh = he; \end{cases}$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} bc \cdot ae - bc \cdot ce \\ bc \cdot ca \end{array} \right\} = \begin{cases} b h^2 - bc \cdot ce \\ < \{ c h^2 \end{cases}$$

$$\text{und } 2\sqrt{bc \cdot ca} = 2ch$$

$$\text{also auch } ac + cb + 2\sqrt{bc \cdot ca} = \begin{cases} ac + cb + \{ 2ch \\ < \{ ce - cb \\ ac + ce \\ ae \end{cases}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} d : ae \\ p : q \end{array} \right\} = d : ac + cb + 2\sqrt{bc \cdot ca} <$$

Construction.

Man nehme $ad = d$, $dap = daq = R$, $ap = p$, $aq = q$, $qe \pm dp$, $abg = R = aef$, $bg = bc$, $ef = ea$ und beschreibe über fg als Durchmesser einen Kreis, welcher der verlängerten ac in dem gesuchten Punkte begegnen wird.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} p : q \\ d : ae \end{array} \right\} = d : ac + cb + 2\sqrt{ac \cdot cb} \text{ (Determin.)} <$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ae \\ ac + ce \\ ac + cb + ce - cb \end{array} \right\} = \begin{cases} ac + cb + 2\sqrt{ac \cdot cb} \\ < \{ \\ \end{cases}$$

$$\text{mithin } 2\sqrt{ac \cdot cb} = \begin{cases} ce - cb \\ < \{ 2ch, \text{ wenn } bh = he, \end{cases}$$

$$\text{und } ac \cdot cb = c h^2$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} ac.cb + bc.ce \\ ae.cb \\ ef.bg \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} ch^2 + bc.ce \\ bh^2 \\ -\frac{1}{4} be^2 \end{array} \right.$$

also berührt der über gf beschriebene Kreis die be in ihrem Halbirungspunkte h (Fig. 26), oder schneidet sie (Fig. 27).

$$\text{Im ersten Fall ist } \left. \begin{array}{l} bg.ef \\ bc.ea \end{array} \right\} = bh^2$$

$$\text{also } bc : bh = hb : ea$$

Nun ist $bh < ae$, also auch $bc < bh$

$$\text{und } bh : \left\{ \begin{array}{l} bh - bc \\ ch \end{array} \right\} = ea : \left\{ \begin{array}{l} ea - bh \\ ah \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } ah.hb = ae.ch$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } d.ch : ah.hb &= d.ch : ae.ch \\ &= d : ae \\ &= p : q. \end{aligned}$$

$$\text{Im zweiten Fall ist } \begin{aligned} bx.xe &= bg.ef \\ &= bc.ae \end{aligned}$$

$$\text{also } bc : bx = xe : ea$$

Es ist aber $xe < ea$, folglich auch $bc < bx$,

$$\text{und } bx : \left\{ \begin{array}{l} xb - bc \\ cx \end{array} \right\} = ae : \left\{ \begin{array}{l} ea - ex \\ ax \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } ax.xb = ae.cx$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } d.cx : ax.xb &= d.cx : ae.cx \\ &= d : ae \\ &= p : q. \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Der Halbirungspunkt von be bestimmt ein grösseres Verhältniss, als jeder andere

Punkt der verlängerten ac . Von zwey auf einerley Seite des Halbirungspunktes liegenden Punkten bestimmt der nähere ein grösseres Verhältniß, als der entferntere.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit be beweist man eben so, wie für x , daß $d.cy : ay.yb = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $d.cx : ax.xb = d.cy : ay.yb$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} d.cx : d.cy \\ cx : cy \end{array} \right\} = ax.xb : ay.yb$$

Und es läßt sich auf einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, y gegeben sind, ein fünfter x auf der Verlängerung von ac finden, so daß $cx : cy = ax.xb : ay.yb$.

Aufgabe V. (Fig. 28—43.)

Auf einer geraden Linie, in welcher drey Punkte a, b, c gegeben sind, zwischen zweyen derselben einen vierten x zu finden, so daß das Verhältniß des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen jener Punkte zu dem Quadrate des Segmentes zwischen x und dem dritten einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 28—32.)

Der Punkt x soll zwischen b, c angegeben werden, so daß $ax.xb : cx^2 = p : q$.

a) Das gegebene Verhältniß ist das der Gleichheit. (Fig. 28.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß $ax.xb = cx^2$,

so ist auch $ax : xc = cx : xb$

$$\text{und } \frac{ax+xc}{ac} : \frac{cx+xb}{bc} = ax : xc$$

Nun sind ac, cb (hyp.) gegebene gerade Linien, also ist das Verhältniß von $ac : cb$ (Dat. 1.), und auch das ihm gleiche von $ax : xc$ gegeben. Es ist aber auch $ax + xc = ac$ gegeben (hyp.), folglich (Dat. 8.) auch ax , somit der Punkt x .

Construction.

Man mache $cad = R = bce$, $ad = ac$, $ce = cb$ und ziehe de . Der Durchschnitt der Linien ac, de ist der verlangte Punkt.

Beweis.

$$\text{Es ist } \frac{ad : ce}{ac : cb} = ax : xc \text{ (El. VI. 4.)}$$

Es ist aber $ac > ax$

also auch $bc > cx$

$$\text{und } \frac{ac-ax}{cx} : \frac{bc-cx}{bx} = ax : xc$$

$$\text{also } ax \cdot xb = cx^2$$

b) das gegebene Verhältniß ist ein Verhältniß der Ungleichheit. (Fig. 29. 30. 31.)

Analysis.

Es sey x der gesuchte Punkt, und man gedenke sich $ax \cdot xb = cx \cdot xg$, so ist $\frac{ax \cdot xb}{cx \cdot xg} : cx^2 = p : q$.

Ferner ist sowohl

$$\begin{aligned} gx : xb &= ax : xc, & \text{als } bx : xc &= gx : xa \\ &= ax + xg : bx + xc & &= bx + xg : cx + xa \\ &= ag : bc & &= bg : ac \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{also } gx : xc \\ p : q \end{aligned} \right\} = ag . gb : ac . cb.$$

Also ist (Dat. 2.) $ag . gb$ gegeben. Es ist aber auch $ag - gb = ab$ gegeben, also ist (Dat. 85) ag , somit der Punkt g , und da $gx : xc$ gegeben ist, und $gx - xc = cg$ oder $cx - gx = cg$ gegeben ist, je nachdem $ag \begin{smallmatrix} > \\ < \end{smallmatrix} ac$, auch gx , somit der Punkt x gegeben.

Construction.

Man mache $acq = R$, $cq = q$, $qp = p$, $pf \perp qb$, $abe = R = bad$, $be = bf$, $ad = ac$, beschreibe über de als Durchmesser einen Kreis, welcher bc , oder ihre Verlängerung in g schneide, ziehe pg und $qx \perp pg$. Der gesuchte Punkt ist x .

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } ag . gb &= ad . be \text{ (Lehns. A.)} \\ &= ac . bf \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } ag . gb : ac . cb &= ac . bf : ac . cb \\ &= fb : bc \\ &= pq : qc \\ &= gx : xc \end{aligned}$$

Ist nun $p < q$, so ist sowohl $bf < bc$ (Fig. 29), als auch $ag . gb < ac . cb$, also $ag < ac$, folglich auch $ag . gb < ac . gb$.

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} ag.gb : ac.cb \\ gx : xc \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} ac.gb : ac.cb \\ gb : bc \end{array} \right.$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} cx - xg \\ cg \end{array} \right\} : gx > \left\{ \begin{array}{l} cb - bg \\ cg \end{array} \right\} : gb$$

folglich $gx < gb$,

also liegt x zwischen b, c .

Ist aber $p > q$, so ist sowohl $bf > bc$ (Fig. 31),
als auch $ag.gb > ac.cb$, folglich $ag > ac$, mithin
auch $ag.gb > ac.gb$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ag.gb : ac.cb \\ gx : xc \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} ac.gb : ac.cb \\ gb : bc \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} gx - xc \\ gc \end{array} \right\} : cx > \left\{ \begin{array}{l} gb - bc \\ gc \end{array} \right\} : cb$$

mithin $cx < cb$.

Also liegt x zwischen b, c .

Ferner ist das Verhältniß von $gx : xc$ aus den
Verhältnissen $ag : bc$ und $bg : ac$ zusammen
gesetzt. Mithin verhält sich, wenn α die vierte
geometrische Proportionallinie zu ag, bc, gx ist,

$$\begin{array}{ll} gx : \alpha = ag : bc & \text{und } \alpha : cx = bg : ac \\ = \left\{ \begin{array}{l} ag - gx \\ ax \end{array} \right\} : bc - \alpha & = bg - \alpha : \left\{ \begin{array}{l} ac - cx \\ ax \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{folglich } gx : xc = bg - \alpha : bc - \alpha$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} cx - xg \\ cg \end{array} \right\} : cx = \left\{ \begin{array}{l} bc - bg \\ cg \end{array} \right\} : bc - \alpha \text{ (Fig. 29)}$$

$$\text{und } gx - xc : cx = \left\{ \begin{array}{l} bg - bc \\ cg \end{array} \right\} : bc - \alpha \text{ (Fig. 31)}$$

$$\text{mithin ist } \left. \begin{array}{l} cx \\ bc - bx \end{array} \right\} = bc - \alpha$$

$$\text{also } bx = \alpha$$

$$\text{Folglich ist } gx : xb = ax : \left\{ \begin{array}{l} bc - bx \\ cx \end{array} \right.$$

$$\text{also } ax \cdot xb = cx \cdot xg$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } ax \cdot xb : cx^2 &= cx \cdot xg : cx^2 \\ &= gx : xc \\ &= p : q. \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt h des Kreises mit ac in ihrer Verlängerung hat man, nachdem $qy \pm ph$ gezogen worden ist,

$$\begin{aligned} ah \cdot hb &= ad \cdot be \text{ (Lehns. A.)} \\ &= ac \cdot bf \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } ah \cdot hb : ac \cdot cb &= ac \cdot bf : ac \cdot cb \\ &= fb : bc \\ &= pq : qc \\ &= hy : yc. \end{aligned}$$

Also ist das Verhältniss $hy : yc$ aus den Verhältnissen $ah : cb$, $bh : ac$ zusammen gesetzt. Bezeichnet man die vierte geometrische Proportionallinie zu ah , cb , hy mit α , so ist mithin $hy : \alpha = ah : bc$.

$$\alpha : cy = bh : ac. \text{ Also ist}$$

$$\text{(Fig. 29)} \quad hy : \alpha = \left\{ \begin{array}{l} ah + hy \\ ay \end{array} \right\} : bc + \alpha \text{ und } \alpha : cy = \alpha - bh : \left\{ \begin{array}{l} cy - ac \\ ay \end{array} \right.$$

$$\text{also } hy : cy = \alpha - bh : bc + \alpha$$

$$\text{folglich } \left\{ \begin{array}{l} cy - yh \\ ch \end{array} \right\} : cy = \left\{ \begin{array}{l} cb + bh \\ ch \end{array} \right\} : bc + \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{mithin } cy \\ cb+by \end{array} \right\} = bc+\alpha$$

$$\text{also } by = \alpha$$

$$\text{folglich } hy : yb = ay : \left\{ \begin{array}{l} bc+by \\ cy \end{array} \right\}$$

$$\text{mithin } hy.yc = ay.yb.$$

$$(\text{Fig. 31}) hy : \alpha = \left\{ \begin{array}{l} hy-ah \\ ay \end{array} \right\} : \alpha-bc \text{ und } \alpha : cy = \alpha+bh : \left\{ \begin{array}{l} cy+ac \\ ay \end{array} \right\}$$

$$\text{also } hy : yc = \alpha+bh : \alpha-bc$$

$$\text{folglich } \left\{ \begin{array}{l} hy-yc \\ hc \end{array} \right\} : cy = \left\{ \begin{array}{l} bh+bc \\ ch \end{array} \right\} : \alpha-bc$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{mithin } cy \\ by-bc \end{array} \right\} = \alpha-bc$$

$$\text{also } by = \alpha$$

$$\text{folglich } hy : yc = ay : \left\{ \begin{array}{l} by-bc \\ cy \end{array} \right\}$$

$$\text{mithin } hy.yb = ay.yb$$

$$\begin{aligned} \text{somit (Fig 29 und 31)} \quad ay.yb : cy^2 &= hy.yc : cy^2 \\ &= hy : yc \\ &= p : q \end{aligned}$$

welches Buch 1. Aufg. IV. Fall 3. ist.

$$\text{Zus. 3. Es ist also } ax.xb : cx^2 = ay.yb : cy^2$$

$$\text{folglich } ax.xb : ay.yb = cx^2 : cy^2$$

und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie vier

Punkte $\left\{ \begin{array}{l} y, a, b, c \text{ (Fig. 29)} \\ a, b, c, y \text{ (Fig. 31)} \end{array} \right\}$ gegeben sind, zwi-

schen b, c ein fünfter x finden, so daß

$$ax.xb : ay.yb = cx^2 : cy^2.$$

Simsons andere Auflösung (Fig. 32).

Analysis.

Es sey x der gesuchte Punkt, so dafs also

$$ax \cdot xb : cx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich über ab als Durchmesser einen Kreis beschrieben, und von x an denselben die Tangente xh gelegt, so ist $hx^2 = ax \cdot xb$ (El. III. 36), folglich ist auch $hx^2 : cx^2 = p : q$, also $hx^2 : cx^2$ einem gegebenen Verhältnisse gleich, mithin auch (Dat. 58) $hx : xc$ einem gegebenen gleich. Es sey dh gezogen, und hx verlängert bis zum Durchschnitt g mit einem in c auf bc errichteten Perpendikel, so wird $\triangle dhx \sim \triangle xcg$ (El. VI. 4),

$$\text{also } hx : xc = dh : cg,$$

mithin ist auch $dh : cg$ einem gegebenen Verhältnisse gleich. Da aber $dh = \frac{1}{2}ab$ gegeben ist, so ist auch (Dat. 2) cg , und der Punkt g , somit die Lage der von g an den über ab beschriebenen Kreis gezogenen Tangente (Dat. 94), und ihr Durchschnitt x mit bc gegeben.

Construction.

Man nehme $cp = p$, $cq = q$, beschreibe über pq als Durchmesser einen Kreis, mache $bcg = R$, verlängere cg , wenn es nöthig ist, bis zum Durchschnitt mit dem Kreise in e , nehme $cf = \frac{1}{2}ab$, $fg \perp ep$, beschreibe über ab als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt d , und lege an denselben die Tangente hg . Der Durchschnitt derselben mit bc ist der verlangte Punkt.

Beweis.

Zieht man dh , so ist $\triangle dhx \sim \triangle xcg$ (El. VI. 4.)

$$\text{also } hx : xc = \begin{cases} dh : cg \\ cf : cg \\ cp : ce \text{ (El. VI. 2.)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{folglich } hx^2 \} : xc^2 = cp^2 : ce^2 \text{ (El. VI. 22.)} \\ &\text{(El. III. 36.) } ax \cdot xb \} = cp : cq \text{ (El. VI. 20. Zus. 2)} \\ &= p : q. \end{aligned}$$

Zus. Zieht man von g die zweite Tangente gk an den über ab beschriebenen Kreis, und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitt mit der verlängerten ca , so ist, wenn dk gezogen wird,

$$\Delta dky \sim \Delta ycg \text{ (El. VI. 4.)}$$

$$\text{also } ky : yc = \begin{cases} dk : cg \\ cf : cg \\ cp : ce \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{folglich } ky^2 \} : yc^2 = cp^2 : ce^2 \text{ (El. VI. 22.)} \\ &\text{(El. III. 36.) } ay \cdot yb \} = cp : cq \text{ (El. VI. 20. Zus. 2)} \\ &= p : q. \end{aligned}$$

Anmerkung. Diese Auflösung rührt eigentlich von Roger Ventemiglia her, und findet sich in der geometrischen Analysis von Hugo de Omerique, Cadix 1698, pag. 256. Sie ist der von Alexander Anderson in seinem Apollonius redivivus vorzuziehen.

Fall II. (Fig. 33. 34. 35. 36.)

Der Punkt x soll zwischen b, c so angegeben werden, daß $ax \cdot xc : bx^2 = p : q$.

a) Insbesondere, das gegebene Verhältniß sey ein Verhältniß der Gleichheit. (Fig. 33.)

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x , so daß also $ax \cdot xc = bx^2$,
so ist mithin $ax : xb = bx : xc$

Aufgabe V.

47

Da $ax > xb$, so wird auch $bx > xc$. Macht man also $fx = bx$, so ist auch $fx > xc$, und man hat,

$$\text{da } ax : xb = fx : xc$$

$$\text{auch } \frac{ax - xb}{ab} : bx = \frac{fx - xc}{fc} : cx$$

$$\text{also } ab : cf = bx : xc$$

$$= \frac{2xb}{bf} : 2xc$$

$$= \frac{ab + bf}{af} : \frac{fc + 2xc}{fx + xc} = \frac{ab + bf}{af} : \frac{bc}{bc}$$

$$\text{mithin } ab \cdot bc = af \cdot fc.$$

Nun sind ab, bc gegeben (hyp.), also ist auch $ab \cdot bc$, somit $af \cdot fc$ gegeben. Es ist aber auch $af \cdot fc$ gegeben, folglich ist (Dat. 85) af , somit der Punkt f , also auch bf , und $bx = \frac{1}{2}bf$, also der Punkt x gegeben.

Construction.

Man nehme $bad = R = bce$, $ad = ab$, ziehe db und verlängere sie bis zum Durchschnitt mit ce in e , beschreibe über de als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ac in f schneide. Der Halbierungspunkt x von bf wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

Es ist $\triangle bce \sim \triangle bad$ (El. VI. 4.)

$$\text{also } ba : ad = bc : ce.$$

Es ist aber $ba = ad$

$$\text{also auch } bc = ce.$$

Ferner ist $af : fc = ad : ce$ (Lehns. A.)
 $= ab : bc$

also $ba : af = fc : cb$

Es ist aber $ab < af$

also auch $fc < cb$

und $\left. \begin{array}{l} fc + cb \\ bf \end{array} \right\} < 2cb$

mithin $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}bf \\ bx \end{array} \right\} < cb$

Also liegt der Punkt x zwischen b, c .

Endlich ist $ab : fc = af : bc$

$= \left\{ \begin{array}{l} fa - ab \\ bf \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} bc - cf \\ 2cx \end{array} \right\}$

$= bx : xc$

also $\left. \begin{array}{l} ab + bx \\ ax \end{array} \right\} : xb = \left\{ \begin{array}{l} fc + cx \\ fx \\ bx \end{array} \right\} : xc$

mithin $ax \cdot xc = bx^2$.

Zus. 1. Für den zweiten Durchschnitt g des Kreises mit der verlängerten ca

ist $ag \cdot gc = ad \cdot ce$
 $= ab \cdot bc$

also $ab : ag = gc : cb$

Nun ist $gc > cb$

also auch $ab > ag$

folglich $\left. \begin{array}{l} 2ab > ba + ag \\ bg \end{array} \right\}$

und $ab > \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}bg \\ by \end{array} \right\}$

also liegt y zwischen a, b .

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } ab : cg &= ag : bc \\ &= \left\{ \begin{array}{l} ba + ag \\ bg \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} bc + cg \\ 2cy \end{array} \right\} \\ &= by : yc \end{aligned}$$

$$\text{also } ab : by = gc : cy$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} ab - by \\ ay \end{array} \right\} : yb = \left\{ \begin{array}{l} gc - cy : \\ gy \\ by \end{array} \right\} yc$$

$$\text{folglich } ay : yc = by^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Zus. 2. (Sims.) Wenn } ab = bc, \text{ so ist (El. II. 5.)} \\ \left. \begin{array}{l} ax : xc \\ bx^2 \end{array} \right\} + bx^2 &= ab^2 \quad \text{und} \quad \left. \begin{array}{l} ay : yc \\ by^2 \end{array} \right\} + by^2 &= ab^2 \\ 2bx^2 & \qquad \qquad \qquad 2by^2 \end{aligned}$$

$$\text{also } bx^2 = \frac{1}{2} ab^2 \quad \text{und} \quad by^2 = \frac{1}{2} ab^2$$

welches eine einfache Construction für x, y zur Hand giebt.

Zus. 3. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte der bc bestimmen Rechtecke, welche grösser sind, als die dadurch bestimmten Quadrate.

b) Allgemein, das gegebene Verhältniss ist ein Verhältniss der Gleichheit, oder Ungleichheit, (Fig. 34. 35.)

a) Insbesondere sey $ab = bc$ (Fig. 34.).

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x ,

so ist $ax \cdot xc : bx^2 = p : q$

$$\text{also } ax \cdot xc + bx^2 \left\{ \begin{array}{l} : bx^2 = p + q : q \\ ab^2 \end{array} \right.$$

Das Verhältnifs von $p + q : q$ ist ein gegebenes (Dat. 7), folglich ist auch das von $ab^2 : bx^2$, mithin auch (Dat. 58) das von $ab : bx$ gegeben. Es ist aber ab gegeben, folglich (Dat. 2) bx , und der Punkt x gegeben.

Construction.

Unter einem beliebigen Winkel lege man ae an ab , nehme $ap = p$, $pq = q$, beschreibe über aq einen Halbkreis, errichte pd in d perpendicular auf ap , verlängere sie bis zum Durchschnitt mit dem Halbkreise in d , ziehe qd , nehme $qe = qd$, ziehe bq und $ex \perp bq$. Der gesuchte Punkt wird x seyn.

Beweis.

Es ist $ab : bx = aq : \left\{ \begin{array}{l} qe \text{ (El. VI. 2.)} \\ qd \end{array} \right.$

Es ist aber $aq > qd$ (El. III. 15.)

folglich ist auch $ab \left\{ \begin{array}{l} > bx \\ bc \end{array} \right.$

Also liegt x zwischen b, c .

Ferner ist $ab^2 : bx^2 = aq^2 : qd^2$ (El. VI. 22.)

$= aq : qp$ (El. VI. 20. Zus. 2.)

also auch $ab^2 - bx^2 \left\{ \begin{array}{l} : bx^2 = \left\{ \begin{array}{l} aq - qp \\ ap \end{array} \right\} : qp \\ \text{(El. II. 5.) } ax \cdot xc \end{array} \right. = p : q$

Zus. Macht man auch $qf = qd$ und zieht $fy \perp qb$, so ist $ab : by = aq : \left\{ \begin{array}{l} qf \\ qd \end{array} \right.$

Es ist aber $aq > qd$

also auch $ab > by$. Mithin liegt y zwischen a, b .

$$\text{Ferner ist } ab^2 : by^2 = aq^2 : qd^2 \\ = aq : qp$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ab^2 - by^2 \\ ay \cdot yc \end{array} \right\} : by^2 = \left\{ \begin{array}{l} aq - qp \\ ap \end{array} \right\} : qp \\ = p : q$$

β) Allgemein sey $ab \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} bc$. (Fig. 35.)

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x , so dafs also

$$ax \cdot xc : bx^2 = p : q$$

Man gedenke sich $ax \cdot xc = bx \cdot xg$, folglich sowohl $gx : xc = ax : xb$, als $cx : xb = gx : xa$,

$$= \left\{ \begin{array}{l} ax + xg \\ ag \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} bx + xc \\ bc \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} gx - xc \\ gc \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} ax - xb \\ ab \end{array} \right\}$$

$$\text{so ist } \left. \begin{array}{l} gx : xb \\ bx \cdot gx \\ ax \cdot xc \end{array} \right\} : bx^2 \left. \begin{array}{l} \\ \\ p : q \end{array} \right\} = ag \cdot gc : ab \cdot bc$$

folglich ist das Verhältnifs von $ag \cdot gc : ab \cdot bc$ einem gegebenen gleich, also selbst gegeben. Es ist aber auch $ab \cdot bc$ gegeben, also auch $ag \cdot gc$ folglich da $ag - gc = ac$ gegeben ist, ag (Dat. 85) und der Punkt g gegeben, und da $gx : xb$ und gb gegeben sind, auch bx (Dat. 8.) und x gegeben.

Construction.

Man nehme $abp = R$, $bq = q$, $qp = p$, $pd \perp aq$,
 $dae = R = bcf$, $ae = ad$, $cf = cb$, beschreibe über fe
als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte
 bc in g schneide, und ziehe $qx \perp pq$. Der Punkt
 x wird der verlangte seyn.

Beweis.

Es ist $ag.gc = ae.cf$ (Lehns. A.)

$$= ad.bc$$

$$\begin{array}{l} \text{also } ad.bc : ab.bc \\ \quad ad : ab \\ \quad qp : qb \\ \quad gx : xb \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} ad.bc : ab.bc \\ ad : ab \\ qp : qb \\ gx : xb \end{array}} \right\} = ag.gc : ab.bc$$

Es ist $ag > ab$

$$\text{also } ag.gc > ab.gc$$

$$\text{und } \begin{array}{l} ag.gc : ab.bc \\ gx : xb \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} ag.gc : ab.bc \\ gx : xb \end{array}} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} ab.gc : ab.bc \\ gc : cb \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } \begin{array}{l} gx+xb \\ gb \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} gx+xb \\ gb \end{array}} \right\} : bx > \left\{ \begin{array}{l} gc+cb \\ gb \end{array} \right\} : bc$$

$$\text{mithin } bx < bc$$

also liegt x zwischen b, c .

Ferner ist das Verhältniß von $gx:xb$ aus den
Verhältnissen $ag:bc$ und $gc:ab$ zusammengesetzt.
Es verhält sich also, wenn α die vierte geome-
trische Proportionallinie zu ag, bc, gx bezeichnet,

$$\begin{array}{lcl} gx : \alpha = ag : bc & \text{und} & \alpha : bx = cg : ab \\ = ag - gx : bc - \alpha & & = cg + \alpha : ab + bx \\ = ax : bc - \alpha & & = cg + \alpha : ax \end{array}$$

$$\text{also } gx : xb = cg + \alpha : bc - \alpha$$

$$\text{folglich } \left. \begin{matrix} gx+xb \\ gb \end{matrix} \right\} : bx = \left\{ \begin{matrix} gc+cb \\ gb \end{matrix} \right\} : bc - a$$

$$\text{mithin ist } \left. \begin{matrix} bx \\ bc - cx \end{matrix} \right\} = bc - a$$

$$\text{also } cx = a$$

$$\text{folglich } gx : xc = ax : \left\{ \begin{matrix} bc - cx \\ bx \end{matrix} \right.$$

$$\text{also } ax \cdot xc = bx \cdot xg$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } ax \cdot xc : bx^2 &= bx \cdot xg : bx^2 \\ &= gx : xb \\ &= p : q. \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte von bc bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den durch den zweiten Durchschnitt h des Kreises mit der verlängerten ca zwischen a, b eben so bestimmten Punkt y, wie x durch g zwischen b, c bestimmt wurde, läßt sich auf gleiche Weise darthun, daß $ay \cdot yc : by^2 = p : q$.

$$\text{Zus. 3. Es ist also } ax \cdot xc : bx^2 = ay \cdot yc : by^2$$

$$\text{folglich } ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx^2 : by^2$$

Es läßt sich demnach, wenn auf einer geraden Linie vier Punkte a, y, b, c bestimmt sind, ein fünfter x zwischen b, c finden, so daß

$$ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx^2 : by^2$$

Simsons andere Auflösung. (Fig. 36).

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x. Ueber ac sey ein Halbkreis beschrieben, und in x ein Perpendikel xf

auf ax errichtet, welches bis zum Durchschnitt f mit dem Halbkreise verlängert werde. Da nun $ax \cdot xc : bx^2 = p : q$, so ist auch (El. VI. 8. und 17.) $fx^2 : bx^2 = p : q$, folglich $fx^2 : bx^2$ einem gegebenen Verhältnisse gleich, somit auch das Verhältniß von $fx : bx$ gegeben (Dat. 58). Es ist aber auch $fxb = R$, folglich (Dat. 44.) das Dreieck fbx der Art nach, somit der Winkel fbx , mithin bf der Lage nach (Dat. 32.), also auch der Durchschnitt f der Linie bf mit dem gleichfalls der Lage nach gegebenen Halbkreise gegeben (Dat. 28.), und da $fxb = R$, auch der Punkt x gegeben (Dat. 33.).

Construction.

Man mache $bap = R = baq$, $ap = p$, $aq = q$, beschreibe über pq als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ba in d schneide, ziehe dp und $bf \perp dp$. Fällt man vom Durchschnitt f mit dem Kreise ein Perpendikel fx auf ac , so ist x der gesuchte Punkt.

Beweis.

Es ist $fx : xb = pa : ad$ (El. VI. 4.)

$$\frac{\text{also } fx^2}{ax \cdot xc} \} : xb^2 = pa^2 : ad^2 \text{ (El. VI. 22.)}$$

$$= pa : aq \text{ (El. VI. 20. Zus. 2.)}$$

$$= p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2, Zieht man von dem zweiten Durchschnitte e des über pq beschriebenen Kreises mit cd eine gerade Linie nach p und $bg \perp ep$, auch von

dem Durchschnitte g dieser Linie mit dem über a c beschriebenen Halbkreise ein Perpendikel gy auf a c, so

ist $gy^2 : yb^2 = pa^2 : ac^2$

$= pa : aq$

$= p : q.$

Anmerkung. Diese Auflösung rührt von Alexander Anderson her. Man sehe dessen Apollonius redivivus pag. 22 des Supplementes.

Fall 3. (Fig. 37—42.)

Der Punkt x soll zwischen b, c so bestimmt werden, daß $bx \cdot xc : ax^2 = p : q.$

a) Das gegebene Verhältniß ist ein Verhältniß der Gleichheit. (Fig. 37. 38.)

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x, so ist $bx \cdot xc = ax^2$

also $cx : xa = ax : xb$

folglich $cx - xa : ax = ax - xb : bx,$

oder, wenn $fx = ax$ gemacht wird, $cf : ax = ab : bx$

also $cf : ab = ax : xb$

$= 2ax : 2bx$

$= 2ax + cf : 2bx + ab$

$= ac : bf$

mithin $bf \cdot fc = ba \cdot ac.$ (El. VI. 16.)

Nun sind a c, a b gegeben (hyp.), folglich ist a c . a b, somit auch b f . f c gegeben. Es ist aber auch $bf + fc = bc$ gegeben, folglich (Dat. 86.) b f, und der Punkt f, mithin auch a f, und $ax = \frac{1}{2}af$, also der Punkt x gegeben.

Determination.

Vermöge (El. II. 5.) muß seyn $ba \cdot ac = \frac{1}{4}bc^2$

Construction.

Man mache $abd = R = ace$, $bd \perp ba$, $ce \perp ca$, ziehe ed , und beschreibe über ed als Durchmesser einen Kreis, welcher der geraden Linie bc in f begegne. Der Halbierungspunkt x von af ist der verlangte.

Beweis.

Es ist $ba \cdot ac \left\{ \begin{array}{l} = \frac{1}{4} bc^2 \text{ (Determin.)} \\ bd \cdot ce \end{array} \right\} <$

führt oder schneidet der über $d e$ beschriebene Kreis die Linie bc . (Lehns. B) Es geschehe das Berühren (Fig. 37), das Schneiden (Fig. 38), in f . Es ist in beiden Fällen

$$ba, ac = bf, fc \text{ (Lehns. B.)}$$

$$\text{also } ac:bf = fc:ba \text{ (El. VI. 14.)}$$

$$\text{Nun ist } ac > fc$$

$$\text{also ist auch } bf > ba$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} ab + bf \\ af \\ 2ax \end{array} \right\} > 2ab$$

folglich $ax > ab$. Also liegt der Punkt x zwischen b, c .

$$\text{Es ist ferner } \left. \begin{array}{l} ac - cf \\ af \\ 2ax \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} fb - ba \\ 2bx \end{array} \right\} = fc:ba$$

$$\text{also } ax:xb = fc:ab$$

$$= fc+ax:ab+bx$$

$$= cx:ax$$

$$\text{mithin } bx \cdot xc = ax^2.$$

Zus. 1. Der (Fig. 37) durch den Halbierungspunkt von bc bestimmte Punkt x bedingt ein grösseres

Verhältniss, als jeder andere Punkt der Linie bc; und die dem Punkte b auf einerley Seite dieses Punktes x näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt g des über d e beschriebenen Kreises (Fig. 38) beweist man eben so, wie für den ersten f, dafs, wenn ag in y halbart wird, $by \cdot yc = ay^2$.

b) Das gegebene Verhältniss ist ein Verhältniss der Ungleichheit. (Fig. 39. 40.)

Analysis.

Der gesuchte Punkt sey x, so dafs also $bx \cdot xc : ax^2 = p : q$. Man gedenke sich $ax \cdot xg = bx \cdot xc$, wobey $cx > xg$ werden mufs, weil $ax > xb$. Alsdann ist $ax \cdot xg : ax^2 \} = p : q$. Auch ist $gx : ax \}$

$$\begin{aligned} \text{sowohl } gx : xb &= cx : xa, \text{ als } bx : xa = gx : xc \\ &= cx - xg : ax - xb &= gx + xb : cx + xa \\ &= cg : ab &= bg : ac \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } gx : ax &\} = bg \cdot gc : ba \cdot ac \\ p : q &\} \end{aligned}$$

Also ist $bg \cdot gc : ba \cdot ac$ einem gegebenen Verhältnisse gleich. Es ist aber $ba \cdot ac$ gegeben, weil ba, ac gegeben sind, also ist auch (Dat. 2.) $bg \cdot gc$ gegeben. Nun ist $bg + gc = bc$ gegeben, folglich ist (Dat. 86.) bg und der Punkt g gegeben. Es ist aber $gx : xa$ gegeben, folglich der Punkt x gegeben (Dat. 8.).

Determination.

Vermöge El. II. 5. mufs seyn $p : q = \frac{1}{4} bc^2 : ba \cdot ac$.

Construction.
 Man mache $baq = R = abe = acf$, $aq = q$,
 $qp = p = q\pi$, $pd \perp qc$, $cf = cd$, $be = ba$, beschreibe
 über ef als Durchmesser einen Kreis, welcher der
 Linie bc begegne in g . Zieht man $qx \perp \pi g$, so
 wird x der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} p:q \\ cd:ac \\ ba.cd:ba.ac \end{array} \right\} = \frac{1}{4} bc^2:ba.ac \text{ (Determin.)}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ba.cd \\ be.cf \end{array} \right\} = \frac{1}{4} bc^2$$

mithin berührt der über ef beschriebene Kreis die
 Linie bc in ihrem Halbirungspunkte g (Fig. 39),
 oder schneidet sie in g (Fig. 40.).

$$\text{In beiden Fällen ist } \left. \begin{array}{l} be.cf \\ ab.cd \end{array} \right\} = bg.gc$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ab.cd:ba.ac \\ cd:ac \\ p:q \\ gx:xa \end{array} \right\} = bg.gc:ba.ac$$

Ferner ist $ac > cg$

$$\text{also } bg.ac > bg.gc$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} ba.ac:bg.ac \\ ba:bg \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} ba.ac:bg.gc \\ ax:xg \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} ab+bg \\ ag \end{array} \right\}:ba > \left\{ \begin{array}{l} ax+xg \\ ag \end{array} \right\}:ax$$

$$\text{mithin } ab < ax;$$

also fällt der Punkt x zwischen b , c .

Ferner ist das Verhältniß von $gx:xa$ aus den Verhältnissen $cg:ab$ und $bg:ac$ zusammengesetzt, und es verhält sich, wenn α die vierte geometrische Proportionallinie zu cg, ab, gx bezeichnet,

$$gx:\alpha = cg:ab \quad \text{und} \quad \alpha:ax = bg:ac$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} cg+gx \\ cx \end{array} \right\} : ab+\alpha = bg-\alpha : \left\{ \begin{array}{l} ac-\alpha x \\ cx \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } gx:ax = bg-\alpha:ab+\alpha$$

$$\text{mithin } \left\{ \begin{array}{l} gx+ax \\ ag \end{array} \right\} : ax = \left\{ \begin{array}{l} bg+ba \\ ag \end{array} \right\} : ab+\alpha$$

$$\text{also auch } \left\{ \begin{array}{l} ax \\ ab+bx \end{array} \right\} = ab+\alpha$$

$$\text{mithin } bx = \alpha$$

$$\text{somit } gx:xb = cx : \left\{ \begin{array}{l} ab+bx \\ ax \end{array} \right\}$$

$$\text{also } ax.xg = bx.xc$$

$$\text{und } bx.xc:ax^2 = ax.xg:ax^2 = gx:xa = p:q.$$

Zus. 1. Für den zweiten Durchschnitt h des Kreises über ef mit bc (Fig. 40.) und den dadurch bestimmten Punkt y läßt sich eben so beweisen, daß $by.yc:ay^2 = p:q$.

$$\text{Zus. 2. Es ist mithin } bx.xc:ax^2 = by.yc:ay^2$$

$$\text{folglich } bx.xc:by.yc = ax^2:ay^2.$$

Man kann also auf einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, y, c gegeben sind, einen fünften x zwischen b, c finden, so daß

$$bx.xc:by.yc = ax^2:ay^2$$

Simsons andere Auflösung. (Fig. 41. 42.)

Analysis.

Es sey der Punkt x so bestimmt, dafs

$$bx \cdot xc : ax^2 = p : q.$$

Beschreibt man über bc einen Halbkreis, und errichtet in x ein Perpendikel auf bc , welches verlängert wird bis zum Durchschnitt mit demselben in e , so ist $ex^2 = bx \cdot xc$, folglich $ex^2 : ax^2 = p : q$. Es ist also das Verhältnifs von $ex^2 : ax^2$, mithin (Dat. 58) auch das von $ex : ax$, und da $axe = R$, das Dreieck axe der Art nach (Dat. 44), folglich der Winkel ead , mithin ea der Lage nach (Dat. 32), somit der Punkt des Zusammentreffens mit dem Halbkreise über bc (Dat. 28), und also auch (Dat. 33) der Punkt x gegeben.

Determination.

Das grösste Verhältnifs, welches ein von irgend einem Punkte des Kreisumfanges auf seinen Durchmesser gefällttes Perpendikel zu ax haben kann, ist das von $hk : ka$ (Fig. 42), wenn ah eine von a an den Kreis gezogene Tangente ist, mithin mufs seyn

$$p : q = hk^2 : ka^2$$

$$= gh^2 : ha^2, \text{ wenn } g \text{ der Mittelpunkt ist,}$$

(El. III. 13. und El. VI. 8.)

$$= \frac{1}{4} bc^2 : ba \cdot ac.$$

Construction.

Man beschreibe über bc einen Halbkreis, mache $ap = p$, $pq = q$, $qpd = R$, beschreibe über aq einen Halbkreis, welcher pd in d schneide, ziehe da , und verlängere sie bis zum Punkt des Zusammentreffens

mit dem über bc beschriebenen Halbkreise in e . Ein Perpendikel von e auf ac wird den gesuchten Punkt x bestimmen.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} p:q \\ ap:pq \\ ap^2:pd^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} bc^2:ba \cdot ac \text{ (Determ.)} \\ gh^2:ha^2. \end{array} \right.$$

$$\text{also } ap:pd \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} gh:ha \\ hk:ka \end{array} \right.$$

Folglich berührt die Verlängerung von da den über bc beschriebenen Kreis in e (Fig. 41.), oder schneidet denselben in e (Fig. 42.).

In beiden Fällen ist $ap:pd = ex:xa$

$$\text{also auch } \left. \begin{array}{l} ap^2:pd^2 \\ p:q \end{array} \right\} \begin{array}{l} = ex^2:ax^2 \\ = bx \cdot xc:ax^2 \end{array}$$

Zus. 1. Für den zweiten Durchschnitt f mit dem Kreise (Fig. 42.) ist, wenn von f ein Perpendikel fy auf ab gefällt wird, $fy:ya = ap:pd$

$$\text{mithin auch } \left. \begin{array}{l} fy^2:ay^2 \\ by \cdot yc:ay^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} = ap^2:pd^2 \\ = ap:pq \end{array}$$

$$= p:q.$$

Zus. 2. (Sims.) Der durch die Tangente (Fig. 41) bestimmte Punkt x bestimmt ein grösseres Verhältniss, als jeder andere Punkt der Linie bc . Die ihm auf einerley Seite näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Aufgabe VI. (Fig. 43—53.)

In der Verlängerung einer geraden Linie, in welcher drey Punkte a, b, c gegeben sind, einen vier-

ten Punkt x zu finden, so daß das Verhältniß des Rechtecks aus den Segmenten zwischen x und zweyen jener Punkte zu dem Quadrate des Segmentes zwischen x und dem dritten einem gegebenen Verhältnisse $p:q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 43. 44.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daß

$$ax \cdot xb : cx^2 = p : q.$$

A n a l y s i s.

Es sey derselbe so gefunden, daß $ax \cdot xb : cx^2 = p : q$. Gedenkt man sich den Punkt g so bestimmt, daß $cx \cdot xg = ax \cdot xb$, wobey $gx > ax$ werden muß, weil $bx > cx$, so ist $cx \cdot xg : cx^2 \left. \begin{array}{l} \\ gx : cx \end{array} \right\} = p : q$. Ferner ist

$$\begin{array}{ll} \text{sowohl } gx : ax = bx : cx, & \text{als } ax : cx = gx : bx \\ & = gx - xb : ax - xc = gx - xa : bx - xc \\ & = gb : ac = ga : bc \end{array}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} gx : xc \\ p : q \end{array} \right\} = ag \cdot gb : ac \cdot cb.$$

Es ist also $ag \cdot gb : ac \cdot cb$ ein gegebenes Verhältniß, und da $ac \cdot cb$ gegeben ist, ist $ag \cdot gb$ gegeben (Dat. 2). Da auch $bg - ga = ab$ gegeben ist, ist ag (Dat. 85), somit g , und da $gx : xc$ gegeben ist, auch gx und der Punkt x gegeben.

D e t e r m i n a t i o n.

Da für jeden Punkt x auf der Verlängerung von ac sowohl $ax > cx$, als $bx > cx$, so ist $ax \cdot xb > cx^2$, also muß auch $p > q$ seyn.

C o n s t r u c t i o n.

Man mache $acp = R = ac\pi$, $cq = q$, $qp = q\pi = p$, $pd \perp aq$, $dae = R = abf$, $ae = ad$, $bf = bc$, beschreibe

über der geraden Linie fe als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ca in g schneide, und ziehe $qx \perp g\pi$. Der gesuchte Punkt wird x seyn.

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist } ae.bf \\ \quad ad.bc \end{array} \right\} = ag.gb \text{ (Lehns. A.)}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ad.bc:ac.cb \\ da:ac \\ pq:qc \\ \pi q:qc \\ gx:xc \end{array} \right\} = ag.gb:ac.cb$$

Folglich ist das Verhältniß von $gx:xc$ aus den Verhältnissen $gb:bc$ und $ag:bc$ zusammengesetzt, und wenn α die vierte geometrische Proportionallinie zu ag, bc , gx bezeichnet,

$$\begin{aligned} \text{ist } gx:\alpha &= gb:ac & \text{und } \alpha:cx &= ag:bc \\ &= \left\{ \begin{array}{l} gx-gb \\ bx \end{array} \right\} : \alpha-ac & & = ga+\alpha : \left\{ \begin{array}{l} bc+cx \\ bx \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{folglich } gx:xc = ga+\alpha : \alpha-ac$$

$$\text{und } \left\{ \begin{array}{l} gx-xc \\ cg \end{array} \right\} : cx = \left\{ \begin{array}{l} ga+\alpha \\ cg \end{array} \right\} : \alpha-ac$$

$$\text{also } \left\{ \begin{array}{l} cx \\ ax-ac \end{array} \right\} = \alpha-ac$$

$$\text{mithin } ax = \alpha$$

$$\text{somit } gx:ax = bx : \left\{ \begin{array}{l} ax-ac \\ cx \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } ax.xb = gx.xc$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } ax.xb:cx^2 &= gx.xc:cx^2 \\ &= gx:xc \\ &= p:q. \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Die auf der verlängerten ac näher bey c liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Zieht man den Punkt π mit dem zweiten Durchschnitte k des über ef beschriebenen Kreises mit der verlängerten ab durch eine gerade Linie zusammen, und nimmt $qy \perp k\pi$, so ist

$$\left. \begin{array}{l} ae : bf \\ ad : bc \end{array} \right\} = ak : kb$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ad : bc : ac : cb \\ da : ac \\ \pi q : qc \\ ky : yc \end{array} \right\} = ak : kb : ac : cb$$

Es ist aber $pq > qc$,
folglich auch $ak : kb > ac : cb$

$$\text{also } ak > ac$$

$$\text{mithin } ak : kb > ac : kb$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} ak : kb : ac : cb \\ ky : yc \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} ac : kb : ac : cb \\ kb : bc \end{array} \right.$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} ky - yc \\ kc \end{array} \right\} : cy > \left\{ \begin{array}{l} kb - bc \\ kc \end{array} \right\} : cb$$

$$\text{also } cy < cb.$$

Ferner ist das Verhältniss von $ky : yc$ aus den Verhältnissen $bk : ac$ und $ak : bc$ zusammengesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportionallinie zu bk, ac, ky bezeichnet, so ist

$$ky : \alpha = bk : ac$$

$$\text{und } \alpha : yc = ak : bc$$

$$= bk - ky : ac - \alpha$$

$$= ak - \alpha : bc - cy$$

$$= by : ac - \alpha$$

$$= ak - \alpha : by$$

folglich $ky:yc = ak - \alpha : ac - \alpha$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ky - yc \\ ck \end{array} \right\} : cy = \left\{ \begin{array}{l} ak + ac \\ ck \end{array} \right\} : ac - \alpha$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} cy \\ ac - ay \end{array} \right\} = ac - \alpha$$

demnach $ay = \alpha$

$$\text{und } ky : ay = by : \left\{ \begin{array}{l} ac - ay \\ cy \end{array} \right.$$

$$\text{also } ay \cdot yb = ky \cdot yc$$

$$\text{und } ay \cdot yb : cy^2 = ky \cdot yc : cy^2$$

$$= ky : yc$$

$$= p : q, \text{ welches Buch 1.}$$

Aufg. V. Fall 1. ist.

Zus. 3. Es is mithin $ax \cdot xb : cx^2 = ay \cdot yb : cy^2$

$$\text{also auch } ax \cdot xb : ay \cdot yb = cx^2 : cy^2.$$

Und man kann auf der Verlängerung einer geraden Linie ac , in welcher vier Punkte a, b, y, c gegeben sind, einen fünften x finden, so daß $ax \cdot xb : ay \cdot yb = cx^2 : cy^2$.

Simsons andere Auflösung. (Fig. 44.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß $ax \cdot xb : cx^2 = p : q$. Beschreibt man über ab einen Halbkreis, und zieht an denselben die Tangente hx , so ist $hx^2 = ax \cdot xb$

$$\text{also } hx^2 : cx^2 = p : q$$

folglich das Verhältniß von $hx^2 : cx^2$, somit auch (Dat. 58.) das von $hx : cx$, also auch, wenn dh gezogen, und $gcx = R$ gemacht wird, das von $dh : gc$ (El. VI. 4.) gegeben. Es ist aber $dh = \frac{1}{2}ab$ gege-

ben, folglich (Dat. 2.) auch cg , und der Punkt g , somit auch (Dat. 94.) die Lage der Tangente gh , und ihr Durchschnitt x mit der verlängerten ac .

Determination.

Da für jeden Punkt x auf der Verlängerung von ac sowohl $ax > cx$, als $bx > cx$, so ist auch $ax \cdot xb > cx^2$, folglich muß $p > q$ seyn.

Construction.

Man nehme $ade = R = adp$, $dp = p$, $pq = q$, $pqf = R$, beschreibe über dp als Durchmesser einen Halbkreis, welcher der qf in f begegne, ziehe pf , mache $pm = pf$, $pk \perp mc$, ziehe ke , welche dem in c auf ac errichteten Perpendikel in g begegne, und lege von g die Tangente gh an den über ab beschriebenen Kreis. Der Durchschnitt x der Verlängerung derselben mit der verlängerten ac wird der verlangte seyn.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } de:gc &= dk:kc \\ &= dp:pm \\ &= dp:pf \end{aligned}$$

Nun ist $dp > pf$ (Determin.)

also auch $ae > gc$

folglich begegnet die Tangente gh der verlängerten ac .

Ferner ist $\triangle dhx \sim \triangle gcx$

$$\begin{aligned} \text{also } hx:xc &= dh:gc \\ &= de:gc \\ &= dp:pf \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich auch } hx^2 \} : cx^2 &= dp^2 : pf^2 \\ ax \cdot xb \} &= dp : pq \\ &= p : q. \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden Punkte der verlängerten ac bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Zieht man von g auch die zweite Tangente gl an jenen Kreis, welche die ac in y zwischen b, c schneide, so ist, wenn dl gezogen wird,

$$\Delta dly \propto \Delta gcy$$

$$\begin{aligned} \text{also } ly : yc &= dl : gc \\ &= de : gc \\ &= dp : pf \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich auch } ly^2 \} : yc^2 &= dp^2 : pf^2 \\ ay \cdot yb \} &= p : q. \end{aligned}$$

Fall 2. (Fig. 45.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, dass

$$bx \cdot xc : ax^2 = p : q.$$

Analysis.

Es sey derselbe so gefunden, dass $bx \cdot xc : ax^2 = p : q$. Man gedenke sich den Punkt g so bestimmt, dass $ax \cdot xg = bx \cdot xc$, wobey $gx < cx$ werden muss, weil $ax > bx$. So ist $ax \cdot xg : ax^2 = p : q$. Ferner ist sowohl

$$\begin{aligned} gx : xb &= cx : xa, & \text{als } bx : xa &= gx : xc \\ &= cx - xg : ax - xb & &= bx - xg : ax - xc \\ &= cg : ab & &= bg : ac \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } gx : xa \} &= bg \cdot gc : ba \cdot ac, \\ p : q \} & \end{aligned}$$

Da nun das Verhältniß von $p:q$ und das Rechteck $ba.ac$ gegeben sind, so ist auch das Rechteck $bg.gc$ gegeben. Es ist aber auch $bg-gc=bc$ gegeben, also ist (Dat. 85.) bg , somit g , und ag , und da $gx:ax$ gegeben ist, auch x gegeben.

Determination.

Da immer $bx < ax$, $cx < ax$, so ist $bx.xc < ax^2$, also muß $p < q$ seyn.

Construction.

Man mache $caq=R$, $aq=q$, $qp=p$, $pf \perp bq$, $abd=R=ace$, $bd=bf$, $ce=ca$, beschreibe über ed als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ac in g schneide, und ziehe $qx \perp pg$. Der Punkt x ist der verlängte.

Beweis.

Es ist $bg.gc = bd.ec$ (Lehns. A.)
 $= bf.ac$

$$\left. \begin{array}{l} \text{als } bf.ac:ba.ac \\ \quad fb:ba \\ \quad pq:qa \\ \quad gx:xa \end{array} \right\} = bg.gc:ba.ac$$

Es ist aber $pq < qa$, also liegt q in der Verlängerung von ap , mithin auch x in der Verlängerung von ag , also auch in der Verlängerung von ac .

Das Verhältniß von $gx:xa$ ist aus den Verhältnissen $cg:ab$ und $bg:ac$ zusammengesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportionalinie zu cg, ab, gx bezeichnet, so ist

$$\begin{array}{lcl} gx:\alpha = cg:ab & \text{und} & \alpha:ax = bg:ac \\ = \left\{ \begin{array}{l} cg+gx \\ cx \end{array} \right\} : ab+\alpha & & = \alpha-bg : \left\{ \begin{array}{l} ax-ac \\ cx \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{folglich } gx:ax = \alpha - bg:ab + \alpha$$

$$\text{mithin } \frac{ax - xg}{ag} \left\{ :ax = \frac{ab + bg}{ag} :ab + \alpha \right.$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ax \\ ab + bx \end{array} \right\} = ab + \alpha$$

$$\text{und } bx = \alpha$$

$$\text{folglich } gx:xb = cx: \left\{ \begin{array}{l} ab + bx \\ ax \end{array} \right.$$

$$\text{also } bx \cdot xc = ax \cdot xg$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } bx \cdot xc : ax^2 &= ax \cdot xg : ax^2 \\ &= gx : ax \\ &= p : q. \end{aligned}$$

Zus. 1. (Sims.)—Die von c entfernten Punkte der verlängerten ac bestimmen grössere Verhältnisse, als die näheren.

Zus. 2. Zieht man den Durchschnitt h des Kreises und der verlängerten cb mit p zusammen, und macht $qy \pm ph$, so ist $bh \cdot hc = bf \cdot ac$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} bf \cdot ac : ba \cdot ac \\ fb : ba \\ pq : qa \\ hy : ya \end{array} \right\} = bh \cdot hc : ba \cdot ac$$

Da nun $bh \cdot hc = bf \cdot ac$, so ist sowohl $bh \cdot hc < ba \cdot ac$, als auch $bh \cdot hc > bf \cdot fc$

folglich $bh < ba$ und $bh > bf$
also liegt h zwischen a, f und es ist $ah < af$.

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } ay : yh &= aq : qp \\ &= ab : bf \end{aligned}$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} ay - yh : ay \\ ah : ay \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} ab - bf : ab \\ af : ab \end{array} \right.$$

folglich $ay < ab$

Ferner ist das Verhältniß von $hy : ya$ aus den Verhältnissen $ch : ab$ und $bh : ac$ zusammen gesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportional-
linie zu ch, ab, gy bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} hy : \alpha &= ch : ab & \text{und } \alpha : ay &= bh : ac \\ &= ch - hy : ab - \alpha & &= bh - \alpha : \begin{cases} ac - ay \\ cy \end{cases} \\ &= cy : ab - \alpha \end{aligned}$$

folglich $hy : ay = bh - \alpha : ab - \alpha$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} ay - yh \\ ah \end{array} \right\} : ay = \left\{ \begin{array}{l} ab - bh \\ ah \end{array} \right\} : ab - \alpha$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ay \\ ab - by \end{array} \right\} = ab - \alpha$$

$$\text{also } by = \alpha$$

$$\text{folglich } hy : yb = cy : \begin{cases} ab - by \\ ay \end{cases}$$

$$\text{also } by \cdot yc = ay \cdot yh$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } by \cdot yc : ay^2 &= ay \cdot yh : ay^2 \\ &= hy : ay \\ &= p : q. \end{aligned}$$

welches Buch 1, Aufg. V. Fall 1, ist.

Zus. 3. Es ist also $bx \cdot xc : ax^2 = by \cdot yc : ay^2$

$$\text{mithin auch } bx \cdot xc : by \cdot yc = ax^2 : ay^2.$$

Und es läßt sich auf der Verlängerung einer geraden Linie ac , in welcher vier Punkte a, y, b, c gegeben sind, ein fünfter Punkt x finden, so daß
 $bx \cdot xc : by \cdot yc = ax^2 : ay^2$,

Simsons andere Auflösung. (Fig. 46.)

Analysis.

Es sey der Punkt x so gefunden, daß

$$bx \cdot xc : ax^2 = p : q.$$

Beschreibt man über bc einen Halbkreis, und zieht an denselben die Tangente kx , so ist $kx^2 = bx \cdot xc$ (El. III. 36), folglich $kx^2 : ax^2 = p : q$, also das Verhältniß von $kx^2 : ax^2$, somit das von $kx : xa$ (Dat. 58) gegeben. Zieht man dk , und verlängert xk bis zum Durchschnitt mit dem in a auf ab errichteten Perpendikel, so ist (El. VI. 4)

$$kx : xa = dk : ah,$$

also auch daß Verhältniß von $dk : ah$, und da $dk = \frac{1}{2}ab$ gegeben ist, auch ah , somit der Punkt h , und die Lage der Tangente hk (Dat. 94), und der Durchschnitt x gegeben.

Determination.

Da für jeden Punkt x auf der Verlängerung von ac sowohl bx , als cx kleiner ist, als ax , so ist auch $bx \cdot xc < ax^2$, folglich muß auch $p < q$ seyn.

Construction.

Man beschreibe über bc als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt d sey, nehme $ade = R = adq$, $dp = p$, $dq = q$, beschreibe über pq einen Halbkreis, welcher der ac , oder ihrer Verlängerung in m begegne, mache $df = dp$, ziehe $mg \perp fe$, $gh \perp ab$, $ha \perp de$, und lege von h die Tangente hk an den über bc beschriebenen Kreis. Der Durchschnitt x der verlängerten Tangente mit der verlängerten ac wird der gesuchte Punkt seyn.

B e w e i s.

Es ist $pd:dm=md:dq$

Da aber $pd < dq$ (Determ.)

so ist $pd \left. \begin{array}{l} \\ df \end{array} \right\} < dm$

Es ist aber auch $fd:dm=ed:dg$
 $=ed:ah$

mithin $ed < ah$. Also schneidet die
 Verlängerung von hk die verlängerte ac .

Zieht man dk , so ist $\Delta hax \sim \Delta dkx$ (El.VI.4.)

folglich $kx:xa=dk:ah$

$=ed:dg$

mithin auch $kx^2 \left. \begin{array}{l} \\ bx \cdot xc \end{array} \right\} : xa^2 = ed^2:dg^2$ (El.VI.22.)
 $=fd^2:dm^2$
 $=pd^2:dm^2$
 $=p:q.$

Zus. 1. Zieht man von h auch die Tangente hl ,
 welche der ab in y begegne, so ist, wenn dl ge-
 zogen wird, $\Delta hay \sim \Delta dly$

also $ly:ya = dl:ah$

$=ed:dg$

mithin $ly^2 \left. \begin{array}{l} \\ by \cdot yc \end{array} \right\} : ya^2 = ed^2:dg^2$
 $=p:q$

Zus. 2. (Sims.) Die entfernteren Punkte der ver-
 längerten bc bestimmen grössere Verhältnisse, als
 die näheren.

Fall 3. (Fig. 47—53.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, dass

$ax \cdot xc:bx^2 = p:q.$

a) Es sey $p = q$. (Fig. 47.)

Analysis.

Der Punkt x sey so bestimmt, daß $ax \cdot xc = bx^2$
so ist $ax : xb = bx : xc$

$$\begin{aligned} &= ax - xb : bx - xc \\ &= ab : bc. \end{aligned}$$

Da ab, bc gegeben sind, so ist das Verhältniß von $ax : xb$ einem gegebenen Verhältnisse gleich, mithin, da auch $ax - xb = ab$ gegeben ist, ax (Dat. 8), und der Punkt x gegeben.

Determination.

Da $ax : xb = ab : bc$, aber immer $ax > xb$ ist, so muß auch $ab > bc$ seyn.

Construction.

Man mache $bad = R = abe$, $ad = ab$, $be = bc$, und ziehe de , deren Verlängerung der verlängerten ac in dem gesuchten Punkte begegnen wird.

Beweis.

Es ist $ab > bc$ (Determ.), folglich auch $ad > be$, mithin begegnet die verlängerte de der verlängerten ab . Es geschehe in x , so ist $ax : xb = ad : be$
 $\quad \quad \quad = ab : bc$

$$\text{also } ax - xb \left\{ \begin{array}{l} bx = ab - bc : cb \\ ab \end{array} \right.$$

Es ist aber $ab > ab - bc$

also ist auch $bx > bc$,

mithin liegt x in der Verlängerung von ac .

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } ax : xb &= ax - ab : xb - bc \\ &= bx : cx \end{aligned}$$

folglich $ax \cdot xc = bx^2$

Zus. (Sims.) Die von c weiter entfernten Punkte der verlängerten ac bestimmen grössere, die näheren kleinere Verhältnisse.

b) Es sey $p < q$. (Fig. 48).

Analysis.

Der Punkt x sey so bestimmt, daß

$$ax \cdot xc : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich $ax \cdot xc = bx \cdot xg$, wobey g zwischen b, c liegen muß, so ist $bx \cdot xg : bx^2 \left. \begin{array}{l} = p : q. \\ gx : xb \end{array} \right\}$ Ferner

$$\begin{aligned} \text{ist sowohl } gx : xa &= cx : xb, \text{ als } ax : xb = gx : xc \\ &= gx - xc : ax - xb = ax - xg : bx - xc \\ &= cg : ab = ag : bc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } gx : xb &\left. \begin{array}{l} = ag \cdot gc : ab \cdot bc \\ p : q \end{array} \right\} \end{aligned}$$

folglich ist wegen der gegebenen $p : q$, und $ab \cdot bc$, auch $ag \cdot gc$ gegeben (Dat. 2), und da $ag + gc = ac$ gegeben ist, auch ag (Dat. 86), somit der Punkt g , also auch bg , und weil $gx : xb$ gegeben ist, auch x gegeben (Dat. 8).

Construction.

Man nehme $abq = R$, $bq = q$, $pq = p$, $pd \perp aq$, $bae = R = acf$, $ae = ad$, $cf = cb$, beschreibe über fe als Durchmesser einen Kreis, welcher der ac in g zwischen b, c begegne, und ziehe $qx \perp pq$. Der Punkt x wird der gesuchte seyn.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist da : } ab &= pq : qb \\ &= p : q \end{aligned}$$

$$\text{aber } p < q$$

also $da < ab$

folglich $bc \cdot da < ab \cdot bc$

Nun ist $ab \cdot bc = \frac{1}{4} ac^2$

also auch $bc \cdot da \left\{ \begin{array}{l} < \frac{1}{4} ac^2 \\ cf \cdot ae \end{array} \right.$

Mithin schneidet der über ef als Durchmesser beschriebene Kreis die bc . Es geschehe in g, h . So

ist $ag \cdot gc = ae \cdot cf$
 $= ad \cdot bc$

folglich $ag \cdot gc < ab \cdot bc$

Also liegt b dem Halbierungspunkte von ac näher, als g (El. II. 5. Cor.), folglich liegen die Durchschnittspunkte auf verschiedenen Seiten von b . Der zwischen b, c liegende sey g .

Nun ist $ag > ab$

also $ag : ad > \left\{ \begin{array}{l} ba : ad \\ bq : qp \\ bx : xg \end{array} \right.$

Da nun $ag \cdot gc = ad \cdot bc$

so ist $ga : ad = bc : cg$

also auch $bc : cg > bx : xg$

und $bc - cg : gc \left\{ \begin{array}{l} > bx - xg : gx \\ bg : gc \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} bx - xg : gx \\ bg : gx \end{array} \right.$

mithin $cg < gx$

Also liegt x in der Verlängerung von bc .

Endlich ist $ad \cdot bc : ab \cdot bc \left\{ \begin{array}{l} = ag \cdot gc : ab \cdot bc \\ da : ab \\ gx : xb \end{array} \right.$

Folglich ist das Verhältniß von $gx:xb$ aus den Verhältnissen $cg:ab$, $ag:bc$ zusammengesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportionalinie zu cg , ab , gx bezeichnet, so ist

$$gx:\alpha = cg:ab \quad \text{und} \quad \alpha:bx = ag:bc$$

$$= \left\{ \frac{gx-gc}{cx} \right\} : \alpha - ab = \alpha - ag : \left\{ \frac{bx-bc}{cx} \right\}$$

$$\text{also } gx:xb = \alpha - ag : \alpha - ab$$

$$\text{folglich } \left\{ \frac{bx-xg}{bg} \right\} : bx = \left\{ \frac{ag-ab}{bg} \right\} : \alpha - ab$$

$$\text{mithin } \left\{ \frac{bx}{ax-ab} \right\} = \alpha - ab$$

$$\text{und } ax = \alpha$$

$$\text{also } gx:ax = cx : \left\{ \frac{ax-ab}{bx} \right\}$$

$$\text{folglich } ax.xc = bx.xg$$

$$\text{und } ax.xc:bx^2 = bx.xg:bx^2$$

$$= gx:xb$$

$$= p:q.$$

Zus. 1. (Sims.) Die entfernteren Punkte, welche zwischen c und dem für $p=q$ bestimmten Punkte liegen, bestimmen grössere Verhältnisse, als die näheren. Die aber dem für $p=q$ bestimmten Punkte hinaus gelegenen näheren Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Man ziehe auch p mit h zusammen und mache $qy \perp ph$. Es ist $ah.hc = ad.bc$

$$\text{folglich } ah:ad = bc:ch$$

Aufgabe VI.

77

Es ist aber $ch > cb$

also auch $ah < ad$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} ab:ad \\ bq:qp \\ by:yh \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} ba:ah \\ \\ bh:ha \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} by-yh:hy \\ bh:hy \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} ba-ah:ha \\ bh:ha \end{array} \right\}$$

mithin $hy > ha$

Also liegt y in der Verlängerung von ca .

$$\text{Ferner ist } \left. \begin{array}{l} ad.bc:ab.bc \\ da:ab \\ hy:yb \end{array} \right\} = ah.hc:ab.bc$$

Folglich ist das Verhältniß von $hy:yb$ aus den Verhältnissen $ch:ab$, $ah:bc$ zusammengesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportional-
linie zu ch , ab , hy bezeichnet, so ist

$$\begin{array}{l} hy:\alpha = ch:ab \quad \text{und} \quad \alpha:by = ah:bc \\ = \left\{ \begin{array}{l} ch+hy \\ cy \end{array} \right\} : ab+\alpha = ah+\alpha : \left\{ \begin{array}{l} bc+by \\ cy \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{also } hy:yb = ah+\alpha:ab+\alpha$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} by-yh \\ bh \end{array} \right\} : by = \left\{ \begin{array}{l} ab-ah \\ bh \end{array} \right\} : ab+\alpha$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} by \\ ba+ay \end{array} \right\} = ab+\alpha$$

$$\text{und } ay = \alpha$$

$$\text{also } hy:ay = cy : \left\{ \begin{array}{l} ab+ay \\ by \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } ay.yc = by.yh$$

$$\begin{aligned} \text{somit } ay.yc : by^2 &= by.yh : by^2 \\ &= hy : yb \\ &= p : q. \end{aligned}$$

Zus. 3. Es ist also $ax.xc : bx^2 = ay.yc : by^2$

$$\text{folglich } ax.xc : ay.yc = bx^2 : by^2$$

und es läßt sich auf der Verlängerung einer geraden Linie yc , in welcher vier Punkte y, a, b, c gegeben sind, ein fünfter x finden, so dafs

$$ax.xc : ay.yc = bx^2 : by^2.$$

c) Es sey $p > q$. (Fig. 49. 50.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xc : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich $ax.xc = bx.xg$, wobey g zwischen a, b fallen mufs, so ist $bx.xg : bx^2 \left. \begin{array}{l} = p : q. \text{ Und} \\ gx : xb \end{array} \right\}$

es ist sowohl

$$\begin{aligned} gx : xa &= cx : xb, \text{ als auch } ax : xb = gx : xc \\ &= gx - xc : ax - xb &= ax - xg : bx - xc \\ &= gc : ab &= ag : bc \end{aligned}$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} gx : xb \\ p : q \end{array} \right\} = ag.gc : ab.bc.$$

Es ist also, da $p : q, ab.bc$ gegeben sind, auch $ag.gc$ (Dat. 2) gegeben. Da nun $ag + gc = ac$ gegeben ist, so ist ag , (Dat. 86), somit der Punkt g wie auch gb , und da $gx : xb$ gegeben ist, auch gx (Dat. 8) und der Punkt x gegeben.

Determination.

Da $ax.xc : bx^2 = p : q$ werden soll, und $p > q$ ist, so mufs $ax.xc > bx^2$ werden, folglich auch

$$\left. \begin{array}{l} ax \cdot xc - bx \cdot xc \\ (ax - xb)cx \\ ab \cdot cx \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} bx^2 - bx \cdot xc \\ bx(bx - xc) \\ bx \cdot bc \end{array} \right.$$

$$\text{also } ab : bc > bx : xc$$

$$\text{Nun ist } bx > xc$$

$$\text{also mu\u00df seyn } ab > bc.$$

Und verm\u00f6ge El. II. 5. mu\u00df man haben

$$p : q \stackrel{=}{<} \frac{1}{4} ac^2 : ab \cdot bc.$$

Construction.

Man nehme $abp = R = abq$, $bq = q$, $qp = p$, $pd \perp aq$, $bae = R = acf$, $ae = ad$, $cf = cb$, beschreibe \u00fcber ef als Durchmesser einen Kreis, welcher der ac in g begegne, ziehe pg , und $qx \perp pg$. Der Punkt x wird die verlangte Eigenschaft haben.

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \stackrel{=}{<} \frac{1}{4} ac^2 : ab \cdot bc \text{ (Determ.)} \\ da : ab \\ da \cdot bc : ab \cdot bc \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{folglich } da \cdot bc \\ ae \cdot cf \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} \frac{1}{4} ac^2$$

Also ber\u00fchrt der \u00fcber ef beschriebene Kreis die ab in ihrem Halbirungspunkte g (Fig. 49), oder schneidet sie zwischen a, b in g (Fig. 50).

Im ersten Fall ist $ab > bc$ (Determ.)

$$\text{also } 2ab > \left\{ \begin{array}{l} ab + bc \\ ac \\ 2ag \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } ba > ag$$

$$\text{mithin } ga : ad < \begin{cases} ba : ad \\ bq : qp \\ bx : xg \end{cases}$$

Nun ist $ag \cdot gc = da \cdot bc$ (Lehns. B.)

$$\text{also } ga : ad = bc : cg$$

$$\text{folglich } bc : cg < bx : xg$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} gc - cb \\ gb \end{array} \right\} : bc > \left. \begin{array}{l} gx - xb \\ gb \end{array} \right\} : bx$$

$$\text{mithin } bc < bx$$

also liegt x in der Verlängerung von ac.

Im zweiten Fall ist $ab > bc$

$$\text{folglich } 2ab > \begin{cases} ab + bc \\ ac \end{cases}$$

$$\text{mithin } ab > \frac{1}{2} ac$$

Also liegt der Halbierungspunkt von ac zwischen a, b.

$$\text{Auch ist } ad > ab$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ad \cdot bc \\ ag \cdot gc \end{array} \right\} > ab \cdot bc$$

folglich liegt g dem Halbierungspunkte von ab näher als b, mithin liegt g zwischen a, b, das heisst, es ist

$$ag < ab$$

$$\text{also } ga : ad < \begin{cases} ba : ad \\ bx : xg \end{cases}$$

$$\text{Nun ist } ag \cdot gc = da \cdot bc$$

$$\text{also } ga : ad = bc : cg$$

$$\text{folglich } bc : cg < bx : xg$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} gc - cb \\ gb \end{array} \right\} : bc > \left. \begin{array}{l} gx - xb \\ gb \end{array} \right\} : bx$$

$$\text{mithin } bc < bx$$

Also liegt x in der Verlängerung von ac .

Ferner ist in beiden Fällen

$$\left. \begin{array}{l} ad.bc : ab.bc \\ da : ab \\ gx : xb \end{array} \right\} = ag.gc : ab.bc$$

Folglich ist das Verhältniss von $gx : xb$ aus den Verhältnissen $gc : ab$, $ag : bc$ zusammengesetzt. Wenn also α die vierte geometrische Proportional-

$$\begin{aligned} gx : \alpha &= gc : ab & \text{und } \alpha : bx &= ag : bc \\ &= \left\{ \begin{array}{l} gx - gc \\ cx \end{array} \right\} : \alpha - ab & &= \alpha - ag : \left\{ \begin{array}{l} bx - bc \\ cx \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{also } gx : xb = \alpha - ag : \alpha - ab$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} gx - xb \\ bg \end{array} \right\} : bx = \left\{ \begin{array}{l} ab - ag \\ bg \end{array} \right\} : \alpha - ab$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} bx \\ ax - ab \end{array} \right\} = \alpha - ab$$

$$\text{also } ax = \alpha$$

$$\text{somit } gx : ax = cx : \left\{ \begin{array}{l} ax - ab \\ bx \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } ax.xc = bx.xg$$

$$\text{und } ax.xc : bx^2 = bx.xg : bx^2$$

$$= gx : xb$$

$$= p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Der in Fig. 49. angegebene Punkt x bestimmt ein grösseres Verhältniss, als jeder andere

in der Verlängerung von ac . Von zwey auf einerley Seite desselben liegenden bestimmt der nähere ein grösseres Verhältniß, als der entferntere.

Zus. 2. Zieht man den Punkt p mit dem zweiten Durchschnitt des Kreises mit ab zusammen und macht $qy \perp ph$, so liegt auch y in der Verlängerung von ac , und es ist $ay \cdot yc : by^2 = p : q$, welches eben so bewiesen werden kann, wie es für x geschehen ist.

Zus. 3. Es ist also $ax \cdot xc : bx^2 = ay \cdot yc : by^2$

folglich $ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx^2 : by^2$.

Und man kann auf der Verlängerung einer geraden Linie ac , in welcher vier Punkte a, b, c, y gegeben sind, einen fünften x finden, so dafs

$$ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx^2 : by^2.$$

Simsons andere Auflösung. (Fig. 51. 52. 53.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc : bx^2 = p : q.$$

Beschreibt man über ac einen Halbkreis, und legt an denselben die Tangente xg , so ist $gx^2 = ax \cdot xc$, folglich $gx^2 : xb^2 = p : q$, mithin das Verhältniß von $gx^2 : xb^2$, also (Dat. 58) auch das von $gx : xb$ gegeben. Zieht man von des Kreises Mittelpunkte m an den Berührungspunkt der Tangente die gerade Linie mg , und verlängert die Tangente bis zum Durchschnitt mit der in b auf ab perpendicularen geraden Linie bf in f , so ist $\Delta mgx \sim \Delta bfx$, folglich verhält sich $gx : xb = mg : bf$, mithin ist auch das Verhältniß von $mg : bf$ gegeben. Es ist aber auch $mg = \frac{1}{2}ac$ gegeben, also auch bf , somit der Punkt f , und die von f an den Kreis gezogene

Tangente fg und der Durchschnitt x derselben mit der verlängerten ac.

Determination.

Bezeichnet man mit k den Durchschnitt des Perpendikels bf mit dem Kreise, so muß, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, werden

$$bf \stackrel{=}{>} bk$$

$$\text{also } mg : bf \stackrel{=}{<} mg : bk$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} mg^2 : bf^2 \\ p : q \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} mg^2 : bk^2 \\ \frac{1}{4}ac^2 : ab \cdot bc \end{array} \right.$$

Ueberdies wird $ax \cdot xc \stackrel{=}{>} bx^2$, wenn $p \stackrel{=}{>} q$.

Es ist aber $mx^2 > ax \cdot xc$ (El. II. 36 und I. 19.)

$$\text{folglich } mx^2 > bx^2$$

$$\text{also } mx > xb$$

Es liegt also der Halbirungspunkt von ac zwischen a, b, und es muß $ab > bc$ seyn.

Construction.

Man beschreibe über ac einen Halbkreis, dessen Mittelpunkt m, mache $bd = mc$, $dp = p$, $pq = q$, beschreibe über dq einen Halbkreis, welcher dem in p auf ab errichteten Perpendikel begegne in e, ziehe de, welche verlängert wird bis zum Durchschnitt f mit dem in b auf ab errichteten Perpendikel, und lege von f eine Tangente fg an den über ac beschriebenen Kreis, deren Durchschnitt mit der verlängerten ac den gesuchten Punkt x bestimmen wird.

B e w e i s.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} p : q \\ dp : pq \\ dp^2 : pe^2 \\ db^2 : bf^2 \\ \frac{1}{4}ac^2 : bf^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \\ \\ \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}ac^2 : ab \cdot bc \text{ (Determin.)} \\ \frac{1}{4}ac^2 : bk^2 \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } bf^2 \geq bk^2$$

$$\text{und } bf \geq bk$$

Ist nun $p < q$, oder ist $ab > bc$, wenn $p \geq q$, so giebt es allemal eine Tangente fg , welche die verlängerte ac in x trifft.

$$\begin{aligned} \text{Und es ist } gx : xb &= db : bf \\ &= dp : pe \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} gx^2 \\ ax \cdot xc \end{array} \right\} : xb^2 = dp^2 : pe^2$$

$$= p : q.$$

Zus. 1. In dem Falle von $p = q$ giebt es, weil $bf = \frac{1}{2}ac$ nicht eine zweite Tangente (Fig. 53). In dem Falle von $p > q$ giebt es, wegen $bf < \frac{1}{2}ac$ eine zweite Tangente, welche gleichfalls die verlängerte ac schneidet. (Fig. 52). In dem Falle von $p < q$ giebt es wegen $bf > \frac{1}{2}ac$ eine zweite Tangente, welche der verlängerten ca in y begegnet (Fig. 51).

Zus. 2. (Sims.) In den Fällen von $p = q$, $p < q$, (Fig. 51, 53) bestimmen die von c entfernteren Punkte der verlängerten ac grössere Verhältnisse als die näheren. Der in dem Falle von $p > q$ sich ergebende Punkt der verlängerten ac , wenn $bf = bk$ wird, bestimmt ein grösseres Verhältniss, als jeder andere der verlängerten ac , und die ihm auf einerley Seite näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Der Bücher

de sectione determinata

Zweites.

Des APOLLONIUS von PERGA

ZWEITES BUCH

de sectione determinata.

Aufgabe I. (Fig. 54—61.)

Auf einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, d gegeben sind, einen fünften x zwischen den beiden mittleren zu finden, so daß das Verhältniß des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Rechtecke aus den Segmenten zwischen x und den beiden anderen Punkten einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleichsey.

Fall 1. (Fig. 54. 55.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daß

$$ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q.$$

a) Es sey $p = q$. (Fig. 54.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß $ax \cdot xb = cx \cdot xd$,

$$\text{so ist } ax : xc = dx : xb$$

$$= ax + xd : cx + xb$$

$$= ad : bc$$

Es ist aber das Verhältniß von $ad : bc$ (Dat. 1.), also auch das von $ax : xc$, und da auch $ax + xc = ac$ gegeben ist, ax (Dat. 8), somit der Punkt x gegeben.

Construction.

Man mache $cae = R = acf$, $ae = ad$, $cf = cb$, und ziehe ef . Der Durchschnittspunkt dieser Linie mit ac wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } ax : xc &= ae : cf \\ &= ad : bc \end{aligned}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ax + xc \\ ac \end{array} \right\} : cx = \frac{ad + bc}{cb} : cb$$

$$\text{Es ist aber } ac < ad + bc$$

folglich auch $cx < cb$.

Also liegt der Punkt x zwischen b, c . Ferner ist

$$\begin{aligned} ax : xc &= ad - ax : bc - cx \\ &= dx : xb \end{aligned}$$

$$\text{mithin } ax \cdot xb = cx \cdot xd.$$

b) Es sey $p > q$. (Fig. 55.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß $ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q$, so ist auch $ax \cdot xb - cx \cdot xd : cx \cdot xd = p - q : q$. Man gedenke sich (nach Fall 1. a.) den Punkt e so gefunden, daß $ae \cdot eb = ce \cdot ed$, wobey wegen $p > q$ der Punkt e so liegen wird, daß $bx > be$. Alsdann ist

$$\begin{aligned} ax \cdot xb &= (ae + ex)(be + ex), \quad cx \cdot xd = (ce - ex)(de - ex) \\ &= ae \cdot eb + (ae + eb + ex)ex, \quad = ce \cdot ed - (ce + ed - ex)ex \end{aligned}$$

$$\text{folglich } ax \cdot xb - cx \cdot xd = (ae + eb + ce + ed) ex \\ = (ac + bd) ex$$

mithin auch $(ac + bd) ex : cx \cdot xd = p - q : q$.
Es sind aber c, d (p. hyp.), e (Fall 1. a.), $p - q : q$ (hyp.) gegeben, also ist die Aufgabe auch 1. Aufgabe III, Fall 1. zurück geführt.

Construction.

Man nehme $cag = R = acf = chp$, $ag = ad$, $cf = cb$, ziehe gf , welche ac in e schneide, mache ferner $ah = db$, $ahp = R$, $cq = q$, $hp = p$, ziehe pq , welche wegen $p > q$ der verlängerten ac begegnet, es geschehe in k , nehme $ckl = R$, $kl = kc$, $md = de$ und beschreibe über ml als Durchmesser einen Kreis, welcher bc in dem gesuchten Punkte schneiden wird.

Beweis.

$$\text{Es ist } hk : kc = hp : cq \\ = p : q$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} hk - kc \\ hc \\ ac + bd \end{array} \right\} : ck = p - q : q$$

Also schneidet vermöge Buch I. Aufg. III. Fall 1. der über ml beschriebene Kreis die ce in x so, daß $(ac + bd) ex : cx \cdot xd = p - q : q$.

Es ist aber

$$\begin{aligned} (ac + bd) ex &= (ae + ec + be + ed) ex \\ &= (ae + eb + ex) ex + (ce + de - ex) ex \\ &= ae \cdot eb + (ae + eb + ex) ex - ce \cdot ed \\ &\quad + (ce + ed - ex) ex \text{ (Fall 1. a.)} \\ &= (ae + ex) (be + ex) - (ce - ex) (de - ex) \\ &= ax \cdot xb - cx \cdot xd \end{aligned}$$

Also ist auch $ax \cdot xb - cx \cdot xd : cx \cdot xd = p - q : q$

folglich $ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte bestimmen kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Vermöge Buch I. Aufg. III. Fall 1. Zus. 2. schneidet der Kreis die verlängerte ad in y so, daß $(ac + bd) ey : cy \cdot yd = p - q : q$. Es ist aber

$$\begin{aligned} (ac + bd) ey &= (ae + eb + ce + ed) ey \\ &= (ae + eb + ey) ey + (ce + ed - ey) ey \\ &= ae \cdot eb + (ae + eb + ey) ey - ce \cdot ed \\ &\quad + (ce + ed - ey) ey \\ &= (ae + ey)(be + ey) - (ey - ec)(ey - ed) \\ &= ay \cdot yb - cy \cdot yd \end{aligned}$$

folglich ist auch $ay \cdot yb - cy \cdot yd : cy \cdot yd = p - q : q$

also $ay \cdot yb : cy \cdot yd = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $ax \cdot xb : cx \cdot xd = ay \cdot yb : cy \cdot yd$

folglich auch $ax \cdot xb : ay \cdot yb = cx \cdot xd : cy \cdot yd$.

Und man kann, wenn in einer geraden Linie fünf Punkte a, b, c, d, y gegeben sind, einen sechsten zwischen b, c finden, so daß

$$ax \cdot xb : ay \cdot yb = cx \cdot xd : cy \cdot yd.$$

c) Es sey $p < q$. (Fig. 55.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß $ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q$, so ist auch $cx \cdot xd : ax \cdot xb = q : p$ mithin dieser Fall auf Fall 1. b. reducirt.

Fall 2. (Fig. 56. 57.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden, daß

$$ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q.$$

a) Es sey $p = q$. (Fig. 56.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß $ax \cdot xc = bx \cdot xd$,
so ist auch $bx : xc = ax : xd$

$$\begin{aligned} &= ax - xb : dx - xc \\ &= ab : cd, \end{aligned}$$

Da aber $ab : cd$, also auch $bx : xc$ und $bx + xc = bc$ gegeben ist, so ist auch bx (Dat. 8), somit der Punkt x gegeben.

Construction.

Man nehme $abe = R = acf$, $be = ba$, $cf = cd$, und ziehe ef . Diese Linie wird bc in dem gesuchten Punkte schneiden,

Beweis.

Es ist $bx : xc = be : cf$ (El. VI. 4.)

$$\begin{aligned} &= ab : cd \\ &= ab + bx : dc + cx \\ &= ax : dx \end{aligned}$$

folglich $ax \cdot xc = bx \cdot xd$.

b) Es sey $p > q$ (Fig. 57).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q$$

folglich auch $ax \cdot xc - bx \cdot xd : bx \cdot xd = p - q : q$.

Man suche (nach Fall 2. a.) den Punkt e so, daß $ae \cdot ec = be \cdot ed$, wobey vermöge Lehrsatz C der Punkt e zwischen c, x fällt. Alsdann ist sowohl

$$\begin{aligned} ax \cdot xc &= (ae - ex)(ce + ex) & \text{, als } bx \cdot xd &= (be - ex)(de + ex) \\ &= ae \cdot ec + (ae - ce - ex)ex & &= be \cdot ed - (ed - be + ex)ex \end{aligned}$$

$$\text{folglich } ax \cdot xc - bx \cdot xd = (ae - ce + ed - eb) ex \\ = (ad - bc) ex$$

mithin auch $(ad - bc) ex : bx \cdot xd = p - q : q$.

Da nun $b, d, e, ad - bc, p - q : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch I. Aufg. III. Fall 2. reducirt.

Construction.

Man nehme $abh = R = abq, bh = ba, cm = cd$, ziehe hm , welche der bc in e begegne, mache $ag = cd, agp = R, bq = q, gp = p$, ziehe pq , welche wegen $p > q$ der verlängerten gb begegnet, es geschehe in f , nehme $bfl = R = bdk, fl = fb, dk = de$ und beschreibe über kl als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt x desselben mit bc ist der gesuchte Punkt.

Beweis.

$$\text{Es ist } gf : fb = gp : bq \\ = p : q$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} gf - fb \\ gb \\ ad - bc \end{array} \right\} : bf = p - q : q.$$

Also schneidet der über kl beschriebene Kreis die Linie be vermöge Buch I. Aufg. III. Fall 2. so, daß

$$(ad - bc) ex : bx \cdot xd = p - q : q$$

folglich ist $(ad - bc) ex + bx \cdot xd : bx \cdot xd = p : q$

Es ist aber

$$\begin{aligned} (ad - bc) ex &= (ae + ed - ec - eb) ex \\ &= (ae - ec - ex) ex + (de - eb + ex) ex \\ &= ae \cdot ec + (ae - ec - ex) ex - be \cdot ed \\ &\quad + (de - eb + ex) ex \text{ (Fall 2. a)} \\ &= (ae - ex) (ce + ex) - (be - ex) (de + ex) \\ &= ax \cdot xc - bx \cdot xd \end{aligned}$$

folglich ist auch $ax, xc : bx, xd = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte b näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Vermöge Buch I. Aufgabe III. Fall 2.

Zus. 2. schneidet der Kreis die verlängerte ad in y so, dafs $(ad - bc)ey : by \cdot yd = p - q = q$.

folglich auch $(ad - bc)ey + by \cdot yd : by \cdot yd = p : q$.

Es ist aber

$$\begin{aligned} (ad - bc)ey &= (ae + ed - ce - eb)ey \\ &= (ae - ec + ey)ey + (de - eb - ey)ey \\ &= (ae - ec + ey)ey - ae \cdot ec + (de - eb - ey)ey + be \cdot ed \\ &= (ae + ey)(ey - ec) - (be + ey)(ey - ed) \\ &= ay \cdot yc - by \cdot yd \end{aligned}$$

folglich ist auch $ay \cdot yc : by \cdot yd = p : q$

Zus. 3. Es ist also $ax \cdot xc : bx \cdot xd = ay \cdot yc : by \cdot yd$

mithin $ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx \cdot xd : by \cdot yd$

Und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, b, c, d, y gegeben sind, ein sechster x zwischen b, c finden, so dafs

$$ax \cdot xc : ay \cdot yc = bx \cdot xd : by \cdot yd.$$

c) Es sey $p < q$. (Fig. 57.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q,$$

so ist auch $bx \cdot xd : ax \cdot xc = q : p$, folglich die Aufgabe auf Fall 2. b. reducirt.

Fall 3. (Fig. 58—61.)

Der Punkt x soll so gefunden werden, dafs

$$ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q.$$

a) Es sey $ab = cd$. (Fig. 58. 59.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{so ist auch } ax \cdot xd - bx \cdot xc : bx \cdot xc = p - q : q \\ (ab + bx) \cdot xd \\ ab \cdot dx + bx \cdot xd \\ ab \cdot dx + bx \cdot xc + bx \cdot cd \\ ab \cdot bd + bx \cdot xc \\ ab \cdot bd \end{array} \right\}$$

Da $ab \cdot bd$, $p - q : q$ gegeben sind, so ist (Dat. 2) $bx \cdot xc$ gegeben, und da $bx + xc = bc$ gegeben ist, ist bx (Dat. 86), somit der Punkt x gegeben.

Determination.

Vermöge El. II. 5. mufs seyn

$$p - q : \frac{1}{4} bc^2 = ab \cdot bd : \frac{1}{4} bc^2$$

$$\text{folglich auch } p : q = ab \cdot bd + \frac{1}{4} bc^2 : \frac{1}{4} bc^2$$

$$= 4ab \cdot bd + bc^2 : bc^2$$

$$= 4ab(bc + cd) + bc^2 : bc^2$$

$$= 4ab \cdot bc + \left\{ \begin{array}{l} 4ab \cdot cd \\ 4ab^2 \end{array} \right\} + bc^2 : bc^2$$

$$= (2ab + bc)^2 : bc^2$$

$$= ad^2 : bc^2.$$

Construction.

Man nehme $abg = R = abh = bcf$, $bg = bd$, $bp = p$, $pq = q$, $qe \perp pc$, welche der bc in e begegne, ziehe ge , welche die cf in f schneide, mache $bh = ba$ und be-

schreibe über hf als Durchmesser einen Kreis, welcher der bc in dem gesuchten Punkte x begegnen wird.

Beweis.

Es ist $p:q \stackrel{=}{>} ad^2:bc^2$ (Determin.)

$$\stackrel{=}{>} (2ab+bc)^2:bc^2$$

$$\stackrel{=}{>} 4ab^2+4ab.bc+bc^2:bc^2$$

$$\stackrel{=}{>} 4ab(dc+cb)+bc^2:bc^2$$

$$\stackrel{=}{>} 4ab.bd+bc^2:bc^2$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} p-q:q \\ bq:qp \\ be:ec \\ bg:cf \\ bd:cf \\ ab.bd:ab:cf \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} \begin{cases} 4ab.bd:bc^2 \\ ab.bd:1/4 bc^2 \end{cases}$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} ab.cf \\ bh.cf \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} 1/4 bc^2$$

Also berührt, oder schneidet der über gf beschriebene Kreis die bc . Es geschehe in x . In beiden Fällen ist $bx.xc=bh.cf$
 $=ab.cf$

$$\text{also } ab.bd:bx.xc=ab.bd:ab.cf$$

$$=p-q:q$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} ab.bd+bx.xc:bx.xc \\ ab.(dx+xb)+bx.xc:bx.xc \\ ab.dx+bx.xd:bx.xc \\ ax.xd:bx.xc \end{array} \right\} = p:q$$

Zus. 1. (Sims.) Der Halbirungspunkt x von bc in Fig. 58. bestimmt ein kleineres Verhältniß, als jeder andere Punkt der geraden Linie bc . Von zwey auf einerley Seite des Halbirungspunktes von bc liegenden Punkten bestimmt der ihm näher liegende ein kleineres Verhältniß, als der entferntere.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnittspunkt y des Kreises mit der Linie bc beweiset man eben so, wie für den Punkt x , daß $ay.yd:by.yc = p:q$.

Zus. 3. Es ist mithin

$$ax.xd:bx.xc = ay.yd:by.yc$$

mithin auch $ax.xd:ay.yd = bx.xc:by.yc$. Es läßt sich also auf einer geraden Linie ad , in welcher fünf Punkte a, b, y, c, d gegeben sind, wenn $ab=cd$ ist, zwischen b, c ein sechster x finden, so daß

$$ax.xd::ay.yd = bx.xc:by.yc.$$

b) Es sey nicht $ab=cd$, z. E. $ab > cd$. (Fig. 60. 61).

A n a l y s i s.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax.xd:bx.xc = p:q,$$

so ist auch $ax.xd - bx.xc:bx.xc = p - q:q$.

Es ist aber $ax.xd = (ab + bx)xd$

$$= ab.dx + bx.xd$$

$$= ad.dx + bx.cd + bx.xc$$

$$= ab.dx + bd.dc - xd.dc + bx.xc$$

$$= (ab - cd)dx + bd.dc + bx.xc$$

folglich auch $ax.xd - bx.xc = (ab - cd)dx + bd.dc$

Verwandelt man $bd.dc$ in ein Rechteck, dessen eine Seite $= ab - cd$, und dessen andere Seite d in

die Verlängerung von ad getragen wird, so ist
 $ax \cdot xd - bx \cdot xc = (ab - cd) dx + (ab - cd) de$
 $= (ab - cd) ex$

folglich ist auch $(ab - cd) ex : bx \cdot xc = p - q : q$.

Da nun $b, c, e, ab - cd, p - q : q$ gegeben sind,
 so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufgabe III, Fall 3.
 reducirt.

Determination.

Vermöge Buch 1. Aufg. III, Fall 3. Determ. muß
 seyn $p - q : q \stackrel{=}{>} ab - cd : be + ec - 2\sqrt{be \cdot ec}$. Also muß

auch seyn $p - q : q \stackrel{=}{>} (ab - cd)(be + ec + 2\sqrt{be \cdot ec})$

$: (be + ec - 2\sqrt{be \cdot ec})(be + ec + 2\sqrt{be \cdot ec})$

$\stackrel{=}{>} (ab - cd) be + (ab - cd) ec$

$+ 2\sqrt{(ab - cd) be (ab - cd) ec} : \begin{cases} (be + ec)^2 - 4be \cdot ec \text{ (El. II. 5. C.)} \\ (be - ec)^2 \\ bc^2. \end{cases}$

Es soll aber werden $(ab - cd) de = bd \cdot dc$

folglich wird $ab - cd : dc = bd : de$

mithin sowohl

$ab - cd : ab = bd : bd + de$, als auch $ab - cd : dc = ac : ce$
 $= bd : be$

also $(ab - cd) be = ab \cdot bd$, und $(ab - cd) ec = ac \cdot cd$

folglich muß seyn $p:q:q \geq ab \cdot bd + ac \cdot cd$

$$+ 2\sqrt{ab \cdot bd \cdot ac \cdot cd} : bc^2$$

$$\geq ac \cdot bd - cb \cdot bd + ab \cdot cd + bc \cdot cd$$

$$+ 2\sqrt{ab \cdot bd \cdot ac \cdot cd} : bc^2$$

$$\geq ac \cdot bd + ab \cdot cd - \left\{ \begin{array}{l} cb(bd - dc) \\ cb^2 \end{array} \right\}$$

$$+ 2\sqrt{ab \cdot bd \cdot ac \cdot cd} : bc^2$$

mithin auch $p:q \geq ac \cdot bd + ab \cdot cd$

$$+ 2\sqrt{ab \cdot bd \cdot ac \cdot cd} : bc^2$$

$$\geq (\sqrt{ac \cdot bd} + \sqrt{ab \cdot cd})^2 : bc^2$$

Anmerkung.

Es ist $(\sqrt{ac \cdot bd} + \sqrt{ab \cdot cd})(\sqrt{ac \cdot bd} - \sqrt{ab \cdot cd})$

$$= ac \cdot bd - \left\{ \begin{array}{l} ab \cdot cd \\ (ad - db)cd \end{array} \right.$$

$$= ad \cdot db - ad \cdot dc$$

$$= ad \cdot bc$$

folglich $\sqrt{ac \cdot bd} + \sqrt{ab \cdot cd} : bc = ad : \sqrt{ac \cdot bd} - \sqrt{ab \cdot cd}$

also auch $p:q \geq ad^2 : (\sqrt{ac \cdot bd} - \sqrt{ab \cdot cd})^2$; und

dieses ist die Simsonsche Determination.

Construction.

Man mache $adg = R = dbn$, $bn = ba$, ziehe ng , welche der verlängerten bd begegne in e , nehme $ah = cd$, $ahp = R = abq$, $hp = p$, $bq = q$, ziehe pq , welche der verlängerten ab begegne in k , mache $bkl = R = bcm$, $kl = kb$, $cm = ce$, und beschreibe über lm als Durchmesser einen Kreis, welcher der bc in dem gesuchten Punkte x begegnen wird.

Aufgabe 1.

99

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } p:q &\stackrel{=}{>} (\sqrt{ac \cdot bd} + \sqrt{ab \cdot cd})^2 : bc^2 \\ &\stackrel{=}{>} ac \cdot bd + ab \cdot cd + 2\sqrt{ac \cdot bd \cdot ab \cdot cd} : bc^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } p-q:q &\stackrel{=}{>} ac \cdot bd + ab \cdot cd - \left\{ \begin{array}{l} bc^2 \\ bc(bd-dc) \end{array} \right\} \\ &\quad + 2\sqrt{ac \cdot bd \cdot ab \cdot cd} : bc^2 \\ &\stackrel{=}{>} ac \cdot bd - cb \cdot bd + ab \cdot cd + bc \cdot cd \\ &\quad + 2\sqrt{ac \cdot bd \cdot ab \cdot cd} : bc^2 \\ &\stackrel{=}{>} ab \cdot bd + ac \cdot cd + 2\sqrt{ab \cdot bd \cdot ac \cdot cd} : bc^2 \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\left. \begin{array}{l} bn:dg \\ ab:cd \end{array} \right\} = be:ed$$

$$\text{also } ab-cd:cd = bd:de$$

folglich

$$ab-cd:ab = bd:\left\{ \begin{array}{l} bd+de \\ be \end{array} \right\} \text{ und } ab-cd:dc = ac:ce$$

$$\text{also } (ab-cd)be = ab \cdot bd \quad \text{und} \quad (ab-cd)ce = ac \cdot cd$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } p-q:q &\stackrel{=}{>} (ab-cd)be + (ab-cd)ce \\ &\quad + 2\sqrt{(ab-cd)be(ab-cd)ce} : bc^2 \\ &\stackrel{=}{>} (ab-cd)(be+ec+2\sqrt{be \cdot ec}) \\ &\quad : \left\{ \begin{array}{l} bc^2 \\ (be-ec)^2 \\ (be+ec)^2 - 4be \cdot ec \\ (be+ec-2\sqrt{be \cdot ec})(be+ec+2\sqrt{be \cdot ec}) \end{array} \right. \\ &\stackrel{=}{>} ab-cd:be+ec-2\sqrt{be \cdot ec}, \end{aligned}$$

$$\text{Nun ist } \left. \begin{array}{l} h p : b q \\ p : q \end{array} \right\} = h k : k b$$

$$\text{folglich } p - q : q = h b : b k.$$

Also berührt, oder schneidet der über $l m$ beschriebene Kreis die $b c$ in einem Punkte x , so daß in beiden Fällen $(a b - c d) e x : b x . x c = p - q : q$ (Buch I, Aufg. III, Fall 3).

$$\text{Es ist aber } (a b - c d) e x = (a b - c d) d x + \left\{ \begin{array}{l} (a b - c d) e d \\ b d . d c \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{also auch } (a b - c d) d x + b d . d c : b x . x c &= p - q : q. \text{ Ferner} \\ (a b - c d) d x + b d . d c + b x . x c &= a b . d x - c d . d x + b d . d c + b x . x c \\ &= a b . d x + b x . c d + b x . x c \\ &= a b . d x + b x . x d \\ &= a x . x d. \end{aligned}$$

$$\text{also } (a b - c d) d x + b d . d c = a x . x d - b x . x c$$

$$\text{mithin } a x . x d - b x . x c : b x . x c = p - q : q$$

$$\text{folglich } a x . x d : b x . x c = p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Der Halbirungspunkt von $k c$ bestimmt ein kleineres Verhältniß, als jeder andere Punkt dieser Linie. Von zwey auf einerley Seite desselben liegenden Punkten bestimmt der nähere ein kleineres Verhältniß, als der entferntere.

Zus. 2. (Sims.) Für den Punkt x des kleinsten Verhältnisses verhält sich $b x^2 : x c^2 = a b . b d : a c . c d$. (Fig. 60).

Zus. 3. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit $k c$ läßt sich eben so, wie für x , beweisen, daß $a y . y d : b y . y c = p : q$.

Zus. 4. Es verhält sich also

$$\underline{ax.xd:bx.xc=ay.yd:by.yc}$$

folglich auch $ax.xd:ay.yd=bx.xc:by.yc$.

Und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, b, y, c, d gegeben sind, und $ab > cd$ ist, zwischen b, c ein sechster x finden, so daß

$$ax.xd:ay.yd=bx.xc:by.yc.$$

Aufgabe II. (Fig. 62—67.)

Auf einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, d gegeben sind, zwischen einem der äusseren und dem nächstliegenden mittleren einen fünften x zu finden, so daß das Verhältniß des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Rechtecke aus den Segmenten zwischen x und den beiden übrigen Punkten einem gegebenen Verhältnisse $p:q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 62. 63. 64.)

Es soll zwischen c, d ein Punkt x gefunden werden, so daß $ax.xd:bx.xc=p:q$.

a) Es sey $ab=cd$. (Fig. 62).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax.xd:bx.xc=p:q,$$

so ist auch $ax.xd+bx.xc:bx.xc=p+q:q$

$$(ac+cx)xd+bx.xc:bx.xc$$

$$ac.xd+(bx+xd)xc:bx.xc$$

$$ac.xd+\{bd.xc\}:bx.xc$$

$$\{ac.xc\}$$

$$ac.cd:bx.xc$$

Nun sind $ac.cd$, $p+q:q$ gegeben, also ist (Dat. 2) $bx.xc$, und da auch $bx-xc$ gegeben ist, bx (Dat. 85), somit x gegeben.

Construction.

Man mache $baf=R=bar=abe$, $af=ac$, $ap=p$, $pq=q=qr$, $qh\perp br$, ziehe fh , welche der be in e begegne, mache $bcg=R$, $cg=cd$ und beschreibe über eg als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ac in dem gesuchten Punkte x schneidet wird.

Beweis.

Es ist $bx.xc = be.cg$ (Lehns. A.)
 $= be.cd$

folglich $ac.cd:bx.xc = ac.cd:be.cd$
 $= ac:be$
 $= af:be$
 $= ah:hb$
 $= aq:qr$
 $= p+q:q$

Es ist aber $p+q > q$

mithin ist auch $ac.cd \} > bx.xc$
 $bd.dc \}$

also $bd > bx$, das heisst, der Punkt x liegt zwischen c, d . Ferner ist

$$ac.cd - bx.xc : bx.xc = p:q$$

Es ist xber $ac.cd = ac.(cx+xd)$

$$\begin{aligned} &= ac.cx + ac.xd \\ &= bd.xc + ac.xd \\ &= (bx+xd)xc + ac.xd \\ &= bx.xc + ax.xd \end{aligned}$$

folglich $ac.cd - bx.xc = ax.xd$

also auch $ax.xd : bx.xc = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden Punkte der cd bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit ab beweiset man eben so, wie für den ersten, dafs $ay.yd : by.yc = p : q$.

Zus. 3. Mithin ist $ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc$

folglich auch $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.

Und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, y, b, c, d gegeben sind, und $ab = cd$ ist, zwischen c, d ein sechster angeben, so dafs

$$ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

b) Es sey $ab > cd$. (Fig. 63).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xb : bx.xc = p : q$$

so ist auch $ax.xd + bx.xc : bx.xc = p + q : q$.

Es ist aber $ax.xd = (ab + bx).xd$

$$= ab.xd + bx.xd$$

$$= ab.xd + bx(dc - cx)$$

$$= ab.xd + bx.dc - bx.xc$$

$$= ab.xd + bd.dc - xd.dc - bx.xc$$

$$= (ab - dc)dx + bd.dc - bx.xc$$

folglich ist

$$ax.xd + bx.xc = (ab - dc)dx + bd.dc.$$

Verwandelt man $bd.dc$ in ein Rechteck, dessen eine Seite $= ab - dc$, und dessen andere Seite d in

die Verlängerung von ad gelegt wird, so ist

$$\begin{aligned} ax \cdot xd + bx \cdot xc &= (ab - dc)(dx + de) \\ &= (ab - dc)ex \end{aligned}$$

folglich auch $(ab - dc)ex : bx \cdot xc = p + q : q$.

Da nun $ab - dc, e, b, c, p + q : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufgabe III. Fall 1. reducirt.

Construction.

Man mache $bdf = R = dbl$, $df = dc$, $bg = ab$, ziehe fg , welche der verlängerten bd in e begegne, nehme $dh = ab$, $dhp = R = hcq$, $hp = p$, $cq = q$, ziehe pq , welche die hc in m schneide, mache $cmk = R$, $mk = mc$, $lb = be$, und beschreibe über kl als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt desselben mit cd ist der verlangte Punkt.

Beweis.

Es ist $bx \cdot xm = bl \cdot mk$ (Lehns. A.)
 $= be \cdot mc$

Es ist aber $be \cdot mc > bc \cdot cm$

also ist $bx \cdot xm > bc \cdot cm$

mithin $mx > mc$

und $be > bx$.

Ferner ist $hm : mc = ph : cq$
 $= p : q$

also $hm + mc \} : cm = p + q : q$. Mithin schneidet der
 $ab - cd \}$

über kl beschriebene Kreis die verlängerte bm so, daß $(ab - cd)ex : bx \cdot xc = p + q : q$. (Buch 1. Aufgabe III. Fall 1).

Da aber $p + q > q$

so ist auch $(ab - cd)ex > bx \cdot xc$, mithin wird auch seyn $cx < cd$. Wo nicht, so wäre

$$cx \geq cd$$

folglich auch $ed \geq ex$, weil $be > bx$,

$$\text{also } (ab - cd)ex \leq (ab - cd)ed$$

$$\text{also auch } bx \cdot xc < (ab - cd)ed.$$

$$\text{Es ist aber } \left. \begin{array}{l} bg : df \\ ab : dc \end{array} \right\} = be : ed$$

$$\text{also } ab - cd : dc = bd : de$$

folglich $(ab - cd)de = bd \cdot dc$. Also wäre auch $bx \cdot xc < bd \cdot dc$, welches unmöglich ist. Es ist also $cx < cd$, und x liegt zwischen c, d . Endlich ist auch $(ab - cd)ex - bx \cdot xc : bx \cdot xc = p : q$

$$\begin{aligned} \text{aber } (ab - cd)ex &= (ab - cd)dx + (ab - cd)de \\ &= ab \cdot dx - cd \cdot dx + bd \cdot dc \\ &= ab \cdot dx + bx \cdot dc \\ &= ab \cdot dx + bx \cdot xc + bx \cdot xd \\ &= ax \cdot xd + bx \cdot xc \end{aligned}$$

$$\text{folglich } (ab - cd)ex - bx \cdot xc = ax \cdot xd$$

$$\text{also } ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Von zwey zwischen c, d gelegenen Punkten bestimmt der näher bei c liegende ein grösseres Verhältniss, als der entferntere.

Zus. 2. Für den Durchschnit y des Kreises mit der verlängerten cb ist vermöge Buch 1. Aufgabe III.

Fall I. Zus. 2. $(ab - dc)ey : by.yc = p + q : q$

also $(ab - dc)ey - by.yc : by.yc = p : q$

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } (ab - dc)ey &= \left\{ (ab - dc)ed \right\} + (ab - dc)dy \\ &= ab.dy - \left\{ \begin{array}{l} (yd - db)dc \\ by.dc \\ by.(dy - yc) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folgl. } (ab - dc)ey - by.yc &= ab.dy - by.yd \\ &= (ab - by)yd. \end{aligned}$$

Es ist aber $(ab - dc)ey > by.yc$

folglich auch $ab > by$, also liegt y zwischen a, b .

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } (ab - dc)ey - by.yc &= (ab - by)yd \\ &= ay.yd \end{aligned}$$

also $ay.yd : by.yc = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc$

folglich $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.

Und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, y, b, c, d , gegeben sind, ein sechster x zwischen c, d , wenn $cd < ab$, finden, so daß

$$ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

c) Es sey $ab < cd$. (Fig. 64).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax.xd : bx.xc = p : q, \text{ so ist auch}$$

$$ax.xd + bx.xc : bx.xc = p + q : q.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Es ist aber } ax \cdot xd &= ax(dc - cx) \\
 &= ax \cdot cd - ax \cdot xc \\
 &= ax \cdot cd - (ab + bx)xc \\
 &= ax \cdot cd - bx \cdot xc \begin{cases} -ab \cdot xc \\ -ab(ax - ac) \\ -ba \cdot ax + ba \cdot ac \end{cases} \\
 &= (cd - ab)ax - bx \cdot xc + ba \cdot ac
 \end{aligned}$$

folglich $ax \cdot xd + bx \cdot xc = (cd - ab)ax + ba \cdot ac$.

Vervandelt man $ba \cdot ac$ in ein Rechteck, dessen eine Seite $= cd - ab$, und dessen andere Seite ae in die Verlängerung von cb gelegt wird, so ist

$$\begin{aligned}
 ax \cdot xd + bx \cdot xc &= (cd - ab)(ax + ae) \\
 &= (cd - ab)ex
 \end{aligned}$$

folglich auch $(cd - ab)ex : bx \cdot xc = p + q : q$.

Nun sind, $(cd - ab)$, e , b , c , $p + q : q$ gegeben, folglich ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. reducirt.

Construction.

Man nehme $baf = R = bcg$, $fa = ab$, $cg = cd$, ziehe gf , welche der verlängerten ba begegne in e , mache $ah = cd$, $bhp = R = abq$, $hp = p$, $bq = q$, ziehe pq , welche der bh begegne in k , nehme $kl = R = bcm$, $lk = kb$, $mc = ce$, und beschreibe über lm als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt desselben mit der verlängerten ac wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } \frac{cg : af}{cd : ab} = \frac{ce : ea}$$

folglich $cd - ab : ba = ca : ae$

also $(cd - ab)ae = ba \cdot ac$.

$$\text{Ferner ist } hk : kb = hp : bq \\ = p : q$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} hb \\ cd-ab \end{array} \right\} : bk = p+q : q$$

Mithin schneidet der über ml beschriebene Kreis die verlängerte bc so, dafs
 $(cd-ab)ex : bx.xc = p+q : q$ (Buch I, Aufg. IV. Fall 1.)

folglich $(cd-ab)ex - bx.xc : bx.xc = p : q$.

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } (cd-ab)ex &= (cd-ab)ea + (cd-ab)ax \\ &= ba.ac + (cd-ab)ax \\ &= cd.ax - (ax-ac)ab \\ &= cd.ax - cx.ab \\ &= cd.ax - cx(ax-xb) \\ &= cd.ax - ax.xc + bx.xc \end{aligned}$$

$$\text{also } (cd-ab)ex - bx.xc = cd.ax - ax.xc \\ = ax.xd$$

$$\text{mithin } ax.xd : bx.xc = p : q$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte c näher liegenden Punkte der Linie cd bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten ck ist $cy.yk = kl.cm = kb.ce$

$$\text{Es ist aber } kb.ce > kb.bc$$

$$\text{also ist } cy.yk > kb.bc$$

$$\text{folglich } cy > cb.$$

Ferner ist vermöge Buch I, Aufgabe IV. Fall 1.

Zus. 2. $(cd-ab)ey : by.yc = p+q : q$

folglich ist $(cd-ab)ey > by.yc$, also wird auch
 seyn $cy < ca$. Wo nicht, so wäre $cy = ca$

also auch $ey < ea$

mithin $(cd-ab)ey < \begin{cases} (cd-ab)ea \\ ba.ac \end{cases}$

also auch $by.yc < ba.ac$, welches unmöglich ist.

Der Punkt y liegt also zwischen a, b . Endlich ist $(cd-ab)ey = (cd-ab)ea + (cd-ab)ay$

$$= ba.ac + cd.ay - ba.ay$$

$$= ba.cy + cd.ay$$

$$= by.yc + ay.yc + cd.ay$$

$$= ay.yd + by.yc$$

also auch $ay.yd + by.yc : by.yc = p+q : q$

folglich $ay.yd : by.yc = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc$

mithin auch $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.

Und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, y, b, c, d gegeben sind, ein sechster zwischen c, d finden, wenn $cd > ab$, so dafs

$$ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

Fall 2. (Fig. 65.)

Der Punkt x soll zwischen c, d so gefunden werden, dafs $ax.xc : bx.xd = p : q$.

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden,
dass $ax.xc : bx.xd = p : q$, so ist auch

$$ax.xc + bx.xd : bx.xd = p + q : q.$$

Es ist aber $ax.xc = (ab + bx)xc$

$$\begin{aligned} &= ab.cx + \begin{cases} bx.xc \\ bx.cd - bx.xd \\ bc.cd + cx.cd - bx.xd. \end{cases} \\ &= (ab + cd)cx + bc.cd - bx.xd \end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} ax.xc + bx.xd &= (ab + cd)cx + bc.cd \\ &= (ab + cd)(cx + ce), \text{ wenn} \\ &\quad (ab + cd)ce = bc.cd \text{ gemacht wird;} \\ &= (ab + cd)ex \end{aligned}$$

mithin ist

$$(ab + cd)ex : bx.xd = p + q : q.$$

Da nun $(ab + cd)$, e , b , d , $p + q : q$, gegeben sind,
so ist die Aufgabe auf Buch I. Aufgabe III. Fall 2.
zurückgeführt.

Construction.

Man mache $acf = R = abg$, $fc = cd$, $gb = ba$,
ziehe fg , welche der bc begegne in e , nehme
 $ch = ab$, $ahp = R = cdq$, $hp = p$, $dq = q$, ziehe pq ,
welche der bd begegne in m , mache $bml = R = abk$,
 $lm = md$, $kb = be$, und beschreibe über kl als
Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt x des-
selben mit der verlängerten bm wird der gesuchte
Punkt seyn.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } hm : md &= hp : dq \\ &= p : q \end{aligned}$$

also $hd \} : dm = p+q : q$. Mithin schneidet der
 $ab+cd \}$

über kl beschriebene Kreis die verlängerte bm so,
 dafs $(ab+cd) ex : bx.xd = p+q : q$. (Buch I. Auf-
 gabe III. Fall 2.) Nun ist $p+q > p$

also ist auch $(ab+cd) ex > bx.xd$, folglich
 wird, da x immer zwischen e, d liegt, seyn $dx < dc$.
 Wo nicht, so wäre

entweder $dx = dc$

folglich $ex = ec$

mithin $(ab+cd) ex = (ab+cd) ec$.

Es ist aber $bg : cf \} = be : ec$
 $ab : cd \}$

also $ab+cd : cd = bc : ce$

mithin $(ab+cd) ce = bc.cd$

also wäre $(ab+cd) ex = bc.cd$

also auch $bx.xd = bc.cd$, welches unmög-
 lich ist.

oder es wäre $dx > dc$

folglich $ex = ec - cx$

mithin $(ab+cd) ex = (ab+cd) ec - (ab+cd) cx$
 $= bc.cd - ab.cx - dc.cx$
 $= bx.xd + bx.cd - ab.cx - bx.xd$
 $= bx.xd - bx.xc - ab.cx$
 $= bx.xd - ax.xc$

folglich $(a b + c d) e x < b x . x d$, welches unmöglich ist. Es liegt also x zwischen c, d . Es ist mithin

$$\begin{aligned} (a b + c d) e x &= (a b + c d) c x + \left\{ \begin{array}{l} (a b + c d) c e \\ b c . c d \end{array} \right\} \\ &= (a b + c d) c x + b c . c d \\ &= a b . c x + \left\{ \begin{array}{l} b c + c x \\ b x . c d \end{array} \right\} c d - b x . x d + b x . x d \\ &= a x . x c + b x . x d \end{aligned}$$

also ist auch $a x . x c + b x . x d : b x . x d = p + q : q$

folglich $a x . x c : b x . x d = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Die von c entfernteren Punkte der Linie $c d$ bestimmen grössere Verhältnisse, als die näheren.

Zus. 2. Für den Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten $c b$ ist

$$(a b + c d) e y : b y . y d = p + q : q.$$

(Buch 1. Aufg. III. Fall 2. Zus. 2).

Es ist aber $p + q > q$

also ist auch $(a b + c d) e y > b y . y d$.

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } (a b + c d) e y &= (a b + c d) c y \left\{ \begin{array}{l} (a b + c d) c e \\ b c . c d \end{array} \right\} \\ &= a b . c y + c d . y b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } (a b + c d) e y - b y . y d &= a b . c y - (y d - d c) b y \\ &= a b . c y - b y . y c \\ &= (a b - b y) y c \end{aligned}$$

folglich $a b > b y$, das heisst, der Punkt y liegt zwischen a, b . Und es ist

$$(a b + c d) e y - b y . y d = a y . y c.$$

Es ist aber $(ab+cd)ey - by.yd : by.yd = p : q$

folglich auch $ay.yc : by.yd = p : q$.

Zus 3. Es ist also

$$\underline{ax.xc : bx.xd = ay.yc : by.yd}$$

folglich auch $ax.xc : ay.yc = bx.xd : by.yd$.

Und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, y, b, c, d gegeben sind, zwischen c, d ein sechster x finden, so daß

$$ax.xc : ay.yc = bx.xd : by.yd.$$

Fall 3. (Fig. 66. 67).

Der Punkt x soll zwischen c, d so gefunden werden, daß $ax.xb : cx.xd = p : q$.

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax.xb : cx.xd = p : q, \text{ so ist auch}$$

$$\underline{ax.xb + cx.xd : cx.xd = p + q : q.}$$

Es ist aber $ax.xb = (ac+cx)(bd-dx)$

$$= ac.bd + bd.cx - ac.dx - cx.xd$$

folglich $ax.xb + cx.xd = ac.bd + bd.cx - ac.dc + ac.cx$

$$= ac.(bd-dc) + (bd+ca)cx$$

$$= ac.cb + (bd+ca)cx$$

$$= (bd+ca)(ce+cx), \text{ wenn}$$

$$(bd+ca)ce = ac.cb \text{ gemacht wird;}$$

$$= (bd+ca)ex$$

mithin auch $(bd+ca)ex : cx.xd = p+q : q$.

Da nun $(bd+ca), e, c, d, p+q : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufgabe III. Fall 3. reducirt.

Determination.

Vermöge Buch 1. Aufg. III. Fall 3. muß seyn

$$\begin{aligned}
 p+q : q &\stackrel{=}{>} (bd+ca) : de+ec-2\sqrt{de.ec} \\
 &\stackrel{=}{>} (bd+ca)(de+ec+2\sqrt{de.ec}) \\
 &\quad : (de+ec-2\sqrt{de.ec})(de+ec+2\sqrt{de.ec}) \\
 &\stackrel{=}{>} (bd+ca)de+(bd+ca)ec \\
 &\quad +2\sqrt{(bd+ca)de(bd+ca)ec} : \begin{cases} (de+ec)^2-4de.ec. \\ (de-ec)^2 \\ cd^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Da nun e so bestimmt wird, daß $(bd+ca)ce=ac.cb$,
so ist $bd+ca : ac = bc : ce$

$$\begin{aligned}
 \text{folglich } bd+ac : bd &= bc : bc-ce \\
 &= bc : be \\
 &= bd+ac-cb : bd-be \\
 &= bd+ab : de \\
 &= ad : de
 \end{aligned}$$

also auch $(bd+ca)ed=ad.db$

mithin muß seyn

$$\begin{aligned}
 p+q : q &\stackrel{=}{>} ad.db+ac.cb+2\sqrt{ad.db.ac.cb} : cd^2 \\
 &\stackrel{=}{>} ac.db+cd.db+ad.cb-dc.cb \\
 &\quad +2\sqrt{ad.db.ac.cb} : cd^2 \\
 &\stackrel{=}{>} ac.db+ad.cb+cd^2+2\sqrt{ad.db.ac.cb} : cd^2
 \end{aligned}$$

also auch $p : q \stackrel{=}{>} ac.db+ad.cb+2\sqrt{ac.db.ad.cb} : cd^2$

$$\stackrel{=}{>} (\sqrt{ac.db}+\sqrt{ad.cb})^2 : cd^2;$$

welches die Simsonsche Determination ist.

Anmerkung.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } & (\sqrt{ac \cdot db} + \sqrt{ad \cdot cb})(\sqrt{ac \cdot db} - \sqrt{ad \cdot cb}) \\ & = ac \cdot db - ad \cdot cb \\ & = ac \cdot db - ad \cdot db + ad \cdot dc \\ & = ad \cdot dc - bd \cdot dc \\ & = ab \cdot cd \end{aligned}$$

folglich ist $\sqrt{ac \cdot db} + \sqrt{ad \cdot cb} : cd = ab : \sqrt{ac \cdot db} - \sqrt{ad \cdot cb}$,
mithin kann die Determination auch so ausgedrückt
werden, dafs $p : q \stackrel{=}{>} ab^2 : (\sqrt{ac \cdot db} - \sqrt{ad \cdot cb})$ seyn
müsse.

Construction.

Man mache $abf = R = bcg$, $bf = bd$, $cg = ca$,
ziehe fg , welche der bc in e begegne, mache $al = cb$,
 $alp = R = ldg$, $lp = p$, $dq = q$, ziehe pq , welche
der ld in m begegne, nehme $bco = cmn = R$, $co = ce$,
 $mn = md$ und beschreibe über mo als Durchmesser
einen Kreis. Derselbe wird der Linie cd in dem
gesuchten Punkte begegnen.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } p : q & \stackrel{=}{>} (\sqrt{ac \cdot db} + \sqrt{ad \cdot cb})^2 : cd^2 \text{ (Determin.)} \\ & \stackrel{=}{>} ac \cdot db + ad \cdot cb + 2\sqrt{ac \cdot db \cdot ad \cdot cb} : cd^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } p + q : q & \stackrel{=}{>} ac \cdot db + ad \cdot cb + cd^2 \\ & \quad + 2\sqrt{ac \cdot db \cdot ad \cdot cb} : cd^2 \\ & \stackrel{=}{>} ac \cdot db + ad \cdot cb + cd \cdot db - cd \cdot bc \\ & \quad + \sqrt{ac \cdot db \cdot ad \cdot cb} : cd^2 \\ & \stackrel{=}{>} ad \cdot db + ac \cdot cb + 2\sqrt{ac \cdot db \cdot ad \cdot cb} : cd^2 \end{aligned}$$

Nun ist $bf : cg \} = be : ec \text{ (El. VI. 4.)}$
 $bd : ca \}$

$$\text{folglich } bd+ca:ac=be+ec:ce \\ =bc:ce$$

also sowohl

$$ac.cb=(bd+ca)ce, \text{ als } bd+ca:bd=bc:bc-ce \\ =bc:be \\ =bd+ca-bc:bd-be \\ =ad:de$$

$$\text{also } (bd+ca)de=ad.db$$

$$\text{mithin } p+q:q \begin{array}{l} \geq (bd+ca)de+(bd+ca)ce \\ +2\sqrt{(bd+ca)de(bd+ca)ce}:cd^2 \\ \geq (bd+ca)(de+ec+2\sqrt{de.ec}) \\ \geq (bd+ca)(de+ec-2\sqrt{de.ec}) \\ \geq bd+ca:de+ec-2\sqrt{de.ec} \end{array}$$

$$\text{Auch ist } lp:dq \left. \begin{array}{l} \\ p:q \end{array} \right\} = lm:md$$

$$\text{folglich } p+q:q = \left\{ \begin{array}{l} lm+md \\ ld \\ bd+ca \end{array} \right\} : md$$

Also berührt, oder schneidet der über on als Durchmesser beschriebene Kreis die cd in x (Fig. 66.67), so daß $(bd+ca)ex:cx.xd=p+q:q$

$$\text{mithin } (bd+ca)ex-cx.xd=p:q$$

$$\begin{array}{l} \text{Es ist aber } (bd+ca)ex=(bd+ca)ec+(bd+ca)cx \\ =ac.cb+(bd+ca)cx \\ =ac.bd-ac.cd+bd.cx+ac.cx \\ =ac.bd+bd.cx-ac.dx \\ =ax.bd-ac.dx \end{array}$$

folglich $(bd+ca)ex - cx.xd = ax.bd - (ac+cx)xd$
 $= ax.xb$

also auch $ax.xb : cx.xd = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Für den in Fig. 66. bestimmten Punkt x verhält sich $ad.db : ac.cb = dx^2 : xc^2$. Dieser Punkt bestimmt ein kleineres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie cd . Die auf einerley Seite ihm näherliegenden Punkte bestimmen kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit cd beweiset man eben so, wie für den Punkt x , daß $ay.yb : cy.yd = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $ax.xb : cx.xd = ay.yb : cy.yd$

folglich auch $ax.xb : ay.yb = cx.xd : cy.yd$. Und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, b, c, y, d gegeben sind, zwischen c, d ein sechster finden, so daß

$$ax.xb : ay.yb = cx.xd : cy.yd.$$

Aufgabe III. (Fig. 68—75).

Auf der Verlängerung einer geraden Linie, in welcher vier Punkte a, b, c, d gegeben sind, einen fünften Punkt x zu finden, so daß das Verhältniß des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Rechteck aus den Segmenten zwischen x und den übrigen gegebenen Punkten einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 68).

Der Punkt x soll so gefunden werden, daß

$$ax.xb : cx.xd = p : q.$$

Analysis.

Er sey so gefunden, dafs $ax.xb:cx.xd = p:q$

so ist auch $ax.xb - cx.xd : cx.xd = p - q : q$.

Gedenkt man sich den Punkt e so bestimmt, dafs $ae.eb = ce.ed$, so ist

$$\begin{aligned} ax.xb &= (ae+ex)(be.ex) \quad \text{und} \quad cx.xd = (xe-ec)(xe-ed) \\ &= ae.eb + (ae+eb+ex)ex \quad = ce.ed \\ &\quad - (ec+ed-ex)ex \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } ax.xb - cx.xd &= (ae+eb+ec+ed)ex \\ &= (ac+bd)ex \end{aligned}$$

also auch $(ac+bd)ex:cx.xd = p-q:q$.

Nun sind $(ac+bd)$, e , c , d , $p-q:q$ gegeben.

Also ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. reducirt.

Determination.

Da immer $ax.xb > cx.xd$, so mufs seyn $p > q$.

Construction.

Man mache $baf = R = ach$, $fa = ad$, $hc = cb$, ziehe hf , welche der ac in e begegne, nehme $ak = bd$, $akp = R$, $kp = p$, $cq = q$, ziehe pq , welche der verlängerten ac begegne in g , mache $cdl = cgm = R$, $dl = de$, $mg = gc$, und beschreibe über lm als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte ad in dem gesuchten Punkte x schneiden wird.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{matrix} p \\ pk \end{matrix} \right\} > \left\{ \begin{matrix} q \\ cq \end{matrix} \right.$$

also begegnet pq in ihrer Verlängerung der verlängerten ac . Es ist auch $kg:gc = kp:cq$
 $= p:q$

$$\left. \begin{array}{l} \text{folglich } kg - gc \\ kc \\ ac + ak \\ ac + bd \end{array} \right\} : cg = p - q : q$$

mithin schneidet der über ml beschriebene Kreis die verlängerte dg in x so, daß

$$(ac + bd)ex : cx \cdot xd = p - q : q \quad (\text{Buch 1. Aufgabe IV. Fall 1}).$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist aber } af : ch \\ ad : bc \end{array} \right\} = ae : ec$$

also ist vermöge Buch 2. Aufg. I. Fall 1. α . die Linie bc in e so geschnitten, daß $ae \cdot eb = ce \cdot ed$.

$$\begin{aligned} \text{Und es ist } (ac + bd)ex &= (ae + ec + be + ed)ex \\ &= (ae + eb + ex)ex + (ce + ed - ex)ex \\ &= ae \cdot eb + (ae + eb + ex)ex - ce \cdot ed \\ &\quad + (ce + ed - ex)ex \\ &= (ae + ex)(be + ex) - (ce - ex)(ed - ex) \\ &= ax \cdot xb - cx \cdot xd \end{aligned}$$

$$\text{also ist auch } ax \cdot xb - cx \cdot xd : cx \cdot xd = p - q : q$$

$$\text{folglich } ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte d näher liegenden Punkte der verlängerten ad bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Vermöge Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. Zus. 2. ist für den Durchschnitt y des Kreises mit ec

$$(ac + bd)ey : cy \cdot yd = p - q : q$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} (ac + bd)ey &= (ae + ec + be + ed)ey \\ &= ae \cdot eb + (ae + eb + ey)ey - ce \cdot ed \\ &\quad + (ce + ed - ey)ey \\ &= (ae + ey)(be + ey) - (ce - ey)(ed - ey) \\ &= ay \cdot yb - cy \cdot yd. \end{aligned}$$

folglich ist $\underline{ay.yb - cy.yd : cy.yd = p - q : q}$

also auch $ay.yb : cy.yd = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $\underline{ax.xb : cx.xd = ay.yb : cy.yd}$

folglich auch $ax.xb : ay.yb = cx.xd : cy.yd$,
und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie fünf
Punkte a, b, y, c, d gegeben sind, auf der Verlän-
gerung ein sechster Punkt x finden, so dafs

$$ax.xb : ay.yb = cx.xd : cy.yd.$$

Fall 2. (Fig. 69).

Der Punkt x soll so bestimmt werden, dafs

$$ax.xc : bx.xd = p : q.$$

Analysis.

Es sey derselbe so gefunden, dafs

$$\underline{ax.xc : bx.xd = p : q, \text{ so ist auch}}$$

$$ax.xc - bx.xd : bx.xd = p - q : q.$$

Es sey der Punkt e so bestimmt, dafs

$$ae.ec = be.ed, \text{ so ist}$$

$$\begin{aligned} ax.xc &= (ae + ex)(xe - ec), \text{ und } bx.xd = (be + ex)(xe - ed) \\ &= (ae - ec + ex)ex - ae.ec \quad = (be - ed + ex)ex - be.ed \end{aligned}$$

$$\text{folglich } ax.xc - bx.xd = (ae - ec - be + ed)ex$$

$$= (ad - bc)ex$$

$$\text{also ist auch } (ad - bc)ex : bx.xd = p - q : q.$$

Da nun $(ad - bc)$, e , b , d , $p - q : q$ gegeben sind,
so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufgabe IV. Fall 2.
zurückgeführt.

Determination.

Da immer $ax.xc > bx.xd$, so muß seyn $p > q$.

Construction.

Man mache $baf = R = abh$, $fa = ad$, $hb = bc$,
ziehe fh , welche der verlängerten ab in e begegne,
nehme $ak = cd$, $akp = R$, $kp = p$, $bq = q$,
ziehe pq , welche der verlängerten ab in g begegne,

make $mgb \doteq R = gdl$, $mg = gb$, $ld = de$, und beschreibe über ml als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt x desselben mit der verlängerten ad wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{matrix} p \\ kp \end{matrix} \right\} > \left\{ \begin{matrix} q \\ bq \end{matrix} \right.$$

also schneidet pq die verlängerte kb .

$$\text{Es ist auch } \left. \begin{matrix} kg : gb \\ kb + bg : gb \end{matrix} \right\} = pk : qb$$

$$= p : q$$

$$\text{folglich } kb : bg = p - q : q$$

$$\left. \begin{matrix} ka + ab \\ cd + ab \\ ad - bc \end{matrix} \right\}$$

$$ad - bc$$

$$ad - bc$$

Mithin schneidet der über ml beschriebene Kreis die verlängerte bd in x , so dafs

$$(ad - bc)ex : bx \cdot xd = p - q : q \quad (\text{Buch 1.}$$

Aufg. IV. Fall 2). Es ist aber

$$\left. \begin{matrix} af : bh \\ ad : bc \end{matrix} \right\} = ae : eb, \text{ also ist vermöge Buch 2. Auf-}$$

gabe I. Fall 2. α . die Linie bc in e so geschnitten, dafs $ae \cdot ec = be \cdot ed$. Es ist also

$$(ad - bc)ex = (ae + ed - be - ec)ex$$

$$= (ae - ec + ex)ex - (be - ed + ex)ex$$

$$= (ae - ec + ex)ex - ae \cdot ec - (be - ed + ex)ex + be \cdot ed$$

$$= (ae + ex)(xe - ec) - (be + ex)(xe - ed)$$

$$= ax \cdot xc - bx \cdot xd$$

$$\text{folglich ist } ax \cdot xc - bx \cdot xd : bx \cdot xd = p - q : q$$

$$\text{also auch } ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte d näher liegenden Punkte der verlängerten ad bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Vermöge Buch 1. Aufg. IV. Fall 2. Zus. 2. ist für den Durchschnitt y des Kreises mit be

$(ad-bc)ey : by.yd = p-q : q$. Es ist aber

$$\begin{aligned}(ad-bc)ey &= (ae+ed-be-ec)ey \\ &= (ae-ec-ey)ey + ae.ec \\ &\quad - (be-ed-ey)ey - be.ed \\ &= (ae-ey)(ec+ey) - (be-ey)(ed+ey) \\ &= ay.yc - by.yd\end{aligned}$$

also ist $ay.yc - by.yd : by.yd = p-q : q$

mithin auch $ay.yc : by.yd = p : q$.

Zus. 3. Es ist also $ax.xc : bx.xd = ay.yc : by.yd$

folglich $ax.xc : ay.yc = bx.xd : by.yd$.

Und es läßt sich, wenn in einer geraden Linie fünf Punkte a, b, y, c, d gegeben sind, ein sechster x in der Verlängerung von ad finden, so daß

$$ax.xc : ay.yc = bx.xd : by.yd.$$

Fall 3. (Fig. 70—75.)

Der Punkt x soll so angegeben werden, daß

$$ax.xd : bx.xc = p : q.$$

a) Es sey $p = q$. (Fig. 70).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax.xd = bx.xc$$

so ist $bx : xd = ax : xc$

$$= ax - xb : cx - xd$$

$$= ab : cd.$$

Da nun $ab : cd$ gegeben ist (Dat. 1), so ist auch $bx : xd$ gegeben, folglich, da $bx - xd = bd$ gegeben ist, auch bx (Dat. 8), somit x gegeben.

Determination.

Da $ax > bx$ für jeden Punkt x auf der Verlängerung von ad , so muß auch $ab > cd$ seyn.

Construction.

Man mache unter einem beliebigen Winkel mit ac die Linien ae , cf einander parallel, nehme $ea = ab$, $fc = cd$, und ziehe ef . Die Verlängerung derselben wird die Verlängerung von ad in dem gesuchten Punkte x schneiden.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{matrix} ab \\ ae \end{matrix} \right\} > \left\{ \begin{matrix} cd \\ cf \end{matrix} \right.$$

also schneidet die Verlängerung von bd die verlängerte ac . Und es ist $ax:xc = ae:cf$
 $= ab:cd$

Es ist aber $ax > ab$

also auch $cx > cd$, mithin liegt x in der Verlängerung von cd .

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } ax:xc &= ax - ab:xc - cd \\ &= bx:xd \end{aligned}$$

folglich $ax \cdot xd = cx \cdot xb$.

b) Es sey nicht $p = q$. (Fig. 71 — 75).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax \cdot xd:bx \cdot xc = p:q.$$

Es ist $ax \cdot xd = (ab + bx) \cdot xd$

$$= ab \cdot dx \left\{ \begin{matrix} + bx \cdot xd \\ + bx \cdot xc \end{matrix} \right.$$

$$\left\{ \begin{matrix} - bx \cdot cd \\ - bd \cdot dc - xd \cdot dc \end{matrix} \right.$$

$$- bd \cdot dc - xd \cdot dc$$

a) Ist nun $ab = cd$ (Fig. 71.), so ist

$$ax \cdot xd = bx \cdot xc - bd \cdot dc$$

folglich $bx.xc - bd.dc : bx.xc = p : q$

also $bd.dc : bx.xc = q - p : q$

Da $bd.dc$, $q - p : p$ gegeben sind, so ist $bx.xc$,
und da auch $bx - xc = bc$ gegeben ist, bx (Dat. 85),
somit der Punkt x gegeben.

Determination.

Da $ax.xd = bx.xc - bd.dc$

so ist $ax.xd < bx.xc$

also muß auch seyn $p < q$.

Construction.

Man mache $bdq = R = bdp$, $dp = p$, $pq = q$,
 $pe \perp bq$, $abf = R = bcg$, $bf = be$, $gc = cd$, und be-
schreibe über fg als Durchmesser einen Kreis. Der
Durchschnitt x desselben mit der verlängerten be
wird der gesuchte Punkt seyn.

Beweis.

Es ist $bx.xc = bf.cg$ (Lehns. A.)
 $= be.cd$

folglich $bd.dc : bx.xc = bd.dc : be.cd$

$= db : be$

$= dq : qp$

$= q - p : p$

Es ist aber $q - p < p$

folglich $bd.dc < bx.xc$

also $bd < bx$

mithin liegt x in der Verlängerung von cd .

Ferner ist $bx \cdot xc - bd \cdot dc$: $bx \cdot xc = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} ab \cdot dx + bx \cdot xc \\ \left\{ \begin{array}{l} -bd \cdot dc - cd \cdot dx \\ -bx \cdot cd \\ +bx \cdot xd \\ ax \cdot xd \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte d näher liegenden Punkte der verlängerten ad bestimmen kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten cb hat man

$$\begin{aligned} by \cdot yc &= bf \cdot cg \\ &= be \cdot cd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } bd \cdot dc : by \cdot yc &= bd \cdot dc : be \cdot cd \\ &= db : be \\ &= q - p : q \end{aligned}$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} bd \cdot dc \\ ba \cdot ac \end{array} \right\} < by \cdot yc$$

folglich $ba < by$

das heißt, der Punkt y liegt in der verlängerten ba,

Ferner ist $by \cdot yc - bd \cdot dc$: $by \cdot yc = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} cd \cdot dy - bd \cdot dc \\ cd \cdot by \\ by \cdot yd \\ ay \cdot yd \end{array} \right\} + by \cdot yc - ab \cdot dy$$

Zus. 3. Es ist also $ax \cdot xd : bx \cdot xc = ay \cdot yd : by \cdot yc$.

folglich $ax \cdot xd : ay \cdot yd = bx \cdot xc : by \cdot yc$.

Und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte y, a, b, c, d gegeben sind, und $ab = cd$ ist, in der verlängerten ad ein sechster finden, so daß $ax \cdot xd : ay \cdot yd = bx \cdot xc : by \cdot yc$.

β) Ist $ab < cd$ (Fig. 72), so ist

$$ax \cdot xd = bx \cdot xc - bd \cdot dc - (cd - ab) dx.$$

Man gedenke sich den Punkt e auf der verlängerten db so bestimmt, dafs $(cd - ab) de = bd \cdot dc$, so ist

$$ax \cdot xd = bx \cdot xc - (cd - ab)(ed + dx)$$

$$= bx \cdot xc - (cd - ab) ex$$

$$\text{folglich } bx \cdot xc - (cd - ab) ex : bx \cdot xc = p : q$$

$$\text{mithin } (cd - ab) ex : bx \cdot xc = q - p : q.$$

Nun sind $cd - ab$, e , b , c , $p - q : q$ gegeben. Also ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. reducirt.

Determination.

Da $ax \cdot xd = bx \cdot xc - (cd - ab) ex$, so ist

$$ax \cdot xd < bx \cdot xc, \text{ also mu\ss auch seyn } p < q.$$

Construction.

Man nehme $abg = R = cdf$, $fd = dc$, $gb = ab$, ziehe fg , welche der verlängerten da in e begegne, nehme $am = cd$, $abq = amp = R$, $bq = q$, $mp = p$, ziehe qp , deren Verlängerung der verlängerten bc in h begegne, mache $bck = R = bhl$, $ck = ce$, $hl = hb$, und beschreibe über kl als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt x desselben mit der verlängerten ch wird der verlangte Punkt seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{matrix} cd \\ df \end{matrix} \right\} > \left\{ \begin{matrix} ab \\ ag \end{matrix} \right. \text{ (p. hyp.)}$$

also begegnet die Verlängerung von fg der verlängerten ba . Auch ist $\left. \begin{matrix} p \\ mp \end{matrix} \right\} < \left\{ \begin{matrix} q \\ qb \end{matrix} \right.$. Mithin schneidet die Verlängerung von qp die verlängerte bm . Und es

$$\text{ist } mh:hb \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}} \right\} = \begin{cases} mp:qb \\ p:q \end{cases}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{matrix} bh-hm \\ bm \\ cd-ab \end{matrix} \right\} : hb = q-p:q$$

Also schneidet der über kl beschriebene Kreis die verlängerte ch in x so, dass

$$(cd-ab)ex:bx.xc = q-p:q \text{ (Buch 1. Aufg. IV. Fall 1.)}$$

$$\text{also ist } (cd-ab)ex < bx.xc$$

mithin muss auch seyn $bx > bd$. Wo nicht, so wäre entweder $bx = bd$

$$\text{folglich } bx.xc = bd.dc \text{ und } (cd-ab)ed = (cd-ab)ex$$

$$\text{Es ist aber } \left. \begin{matrix} df:bg \\ dc:ab \end{matrix} \right\} = de:eb$$

$$\text{folglich } cd-ab:cd = de-eb:de = db:de$$

$$\text{also } \left. \begin{matrix} (cd-ab)de \\ (cd-ab)ex \end{matrix} \right\} = \begin{cases} bd.dc \\ bx.xc \end{cases}$$

welches unmöglich ist.

Oder es wäre $bx < bd$

$$\begin{aligned} \text{folglich wäre } (cd-ab)ex &= (cd-ab)ed - (cd-ab)dx \\ &= bd.dc - cd.dx + ab.dx \\ &= bx.dc + ab.dx \end{aligned}$$

$$\text{also auch } bx.xc - (cd-ab)ex = bx.xc - bx.dc - ab.dx$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } bx.xc &= (cd-ab)ex + bx.xc - bx.dc - ab.dx \\ &= (cd-ab)ex - bx.xd - ab.dx \\ &= (cd-ab)ex - ax.xd \end{aligned}$$

mithin $bx \cdot xc < (cd - ab)ex$, welches unmöglich ist.

Es ist also $bx > bd$, das heisst der Punkt x liegt in der Verlängerung von ad .

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } (cd - ab)ex &= (cd - ab)ed + (cd - ab)dx \\ &= bd \cdot dc + cd \cdot dx - ab \cdot dx \\ &= bx \cdot cd - ab \cdot dx \end{aligned}$$

$$\text{folglich auch } bx \cdot cd - ab \cdot dx : bx \cdot xc = q - p : q$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} bx \cdot xc - bx \cdot cd \\ bx \cdot xd \end{array} \right\} + ab \cdot dx : bx \cdot xc = p : q$$

$$ax \cdot xd$$

Zus. 1. (Sims.) Die von d entfernteren Punkte der verlängerten ad bestimmen grössere Verhältnisse, als die näheren.

Zus. 2. Vermöge Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. Zus. 2. ist für den Durchschnitt y des Kreises mit be gleichfalls

$$(cd - ab)ey : by \cdot yc = q - p : q$$

folglich ist auch $by \cdot yc - (cd - ab)ey : by \cdot yc = p : q$.

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } (cd - ab)ey &= (cd - ab)de - (cd - ab)dy \\ &= bd \cdot dc - cd \cdot dy + ab \cdot dy \\ &= ab \cdot dy - cd \cdot by ; \text{ folglich} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ist auch } by \cdot yc - (cd - ab)ey &= by \cdot yc - ab \cdot dy + cd \cdot by \\ &= by \cdot yd - ab \cdot dy \\ &= (by - bd) dy \end{aligned}$$

Nun ist $by \cdot yc > (cd - ab)ey$, wegen $q > q - p$

also ist auch $by > ab$, das heisst, der Punkt y liegt in der Verlängerung von ba . Und es ist

$$\left. \begin{array}{l} (by - ba)dy \\ ay \cdot yd \end{array} \right\} : by \cdot yc = p : q$$

Zus. 3. Es verhält sich also

$$\underline{ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc}$$

folglich $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.

Und es läßt sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte y, a, b, c, d gegeben sind und $ab < cd$ ist, auf der Verlängerung von ad ein sechster Punkt x finden, so daß $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.

γ) Ist $ab > cd$ (Fig. 73), so ist

$$ax.xd = (ab - cd)dx + bx.xc - bd.dc.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt e so bestimmt, daß $(ab - cd)de = bd.dc$, so ist

$$\underline{ax.xd = (ab - cd)dx + bx.xc - (ab - cd)de}$$

1.) Ist nun $p < q$

so ist auch $\underline{ax.xd < bx.xc}$

$$\text{folglich } ax.xd = bx.xc \begin{cases} -(ab - cd)(ed - dx) \\ -(ab - cd)ex \end{cases}$$

$$\underline{\text{mithin } bx.xc - (ab - cd)ex : bx.xc = p : q.}$$

$$\text{also } (ab - cd)ex : bx.xc = q - p : q.$$

Nun sind $(ab - cd)$, e, b, x, $q - p : q$ gegeben. Also ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. III. Fall 1. reducirt.

Construction.

Man nehme $abf = R = adg$, $bf = ba$, $dg = dc$, ziehe fg, welche der verlängerten cd in e begegne, mache $dm = ab$, $bcq = R = bmp$, $cq = q$, $mp = p$, ziehe qp, welche die verlängerte cm in h schneide, nehme $bhk = R$, $kh = hc$, $lb = be$ und beschreibe über lk als Durchmesser einen Kreis. Der Durchschnitt x desselben mit der verlängerten hb wird der gesuchte Punkt seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{matrix} ab \\ bf \end{matrix} \right\} > \left\{ \begin{matrix} cd \\ dg \end{matrix} \right.$$

Also begegnet fg der verlängerten bd, und es ist

$$\left. \begin{matrix} bf:dg \\ ab:cd \end{matrix} \right\} = be:ed$$

$$\text{folglich } \frac{ab-cd:cd}{=bd:de}$$

also $(ab-cd)de = bd \cdot dc$. Es ist ferner

$$\left. \begin{matrix} p \\ mp \end{matrix} \right\} < \left\{ \begin{matrix} q \text{ und } md > dc \\ cq \end{matrix} \right.$$

Also schneidet qp die verlängerte cm. Und es ist

$$\left. \begin{matrix} pm:cq \\ p:q \end{matrix} \right\} = mh:hc$$

$$\begin{aligned} \text{also } q-p:q &= ch-hm:hc \\ &= mc:ch \\ &= ab-cd:ch \end{aligned}$$

folglich schneidet der über lk beschriebene Kreis die verlängerte bc in x so, daß

$$(ab-cd)ex:bx \cdot xc = q-p:q. \text{ (Buch 1. Aufg. III. Fall 1.)}$$

$$\text{also ist } (ab-cd)ex < bx \cdot xc. \text{ mithin auch } bx > bd$$

Wo nicht, so wäre entweder $bx = bd$

$$\text{also } cx = cd, \text{ ex} = ed$$

$$\text{mithin } bx \cdot xc = bd \cdot dc, (ab-cd)ex = (ab-cd)ex = bd \cdot dc$$

folglich $bx \cdot xc = (ab-cd)ex$, welches unmöglich ist.Oder $bx < bd$

$$\text{folglich } ex = ed + dx$$

$$\begin{aligned} \text{also } (ab - cd) ex &= (ab - cd) ed + (ab - cd) dx \\ &= bd \cdot dc + (ab - cd) dx, \quad \text{mithin} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bx \cdot xc - (ab - cd) ex &= bx \cdot xc - bd \cdot dc - (ab - cd) dx \\ &= bx \cdot xc - bd \cdot dc - ab \cdot dx + cd \cdot dx \\ &= bx \cdot xc - ab \cdot dx - bx \cdot cd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } bx \cdot xc &= (ab - cd) ex - bx \cdot xd - ab \cdot dx \\ &= (ab - cd) ex - ax \cdot xd \end{aligned}$$

folglich $bx \cdot xc < (ab - cd) ex$, welches unmöglich ist.

Es ist also $bx > bd$, das heisst, der Punkt x liegt in der Verlängerung von bd .

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } (ab - cd) ex &= (ab - cd) de - (ab - cd) dx \\ &= bd \cdot dc - ab \cdot dx + cd \cdot dx \\ &= bx \cdot cd - ab \cdot dx, \quad \text{folglich} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [bx \cdot xc - (ab - cd) ex] &= bx \cdot xc - bx \cdot cd + ab \cdot dx \\ &= bx \cdot xd + ab \cdot xd \\ &= ax \cdot xd \end{aligned}$$

$$\text{also } (ab - cd) ex = bx \cdot xc - ax \cdot xd$$

$$\text{mithin } bx \cdot xc - ax \cdot xd : bx \cdot xc = q - p : q$$

$$\text{folglich auch } ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q.$$

Zus. 1. (Sims.) Die dem Punkte d näher liegenden Punkte der verlängerten ad bestimmen kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Vermöge Buch 1. Aufg. III. Fall 1. Zus 2. ist für den Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten cb gleichfalls

$$(ab - cd) ey : by \cdot yc = q - p : q$$

$$\text{also ist } (ab - cd) ey < by \cdot yc \text{ und}$$

$$by \cdot yc - (ab - cd) ey : by \cdot yc = p : q$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } (ab - cd)ey &= (ab - cd)dy + (ab - cd)de \\ &= ab.dy - cd.dy + bd.dc \\ &= ab.dy - dc.by \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } by.yc - (ab - cd)ey &= by.yc - ab.dy + dc.by \\ &= by.yd - ab.dy \\ &= (by - ba)dy \end{aligned}$$

also ist $by > ba$, das heisst, der Punkt y liegt in der verlängerten ba , und es ist

$$\left. \begin{aligned} (by - ba)dy \\ ay.yd \end{aligned} \right\} : by.yc = p : q$$

Zus. 3. Es ist also $ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc$

folglich $ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc$.

Und es lässt sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte y, a, b, c, d gegeben sind, und $ab > cd$, auch $ay.yd < by.yc$ ist, in der Verlängerung von ad ein sechster Punkt x finden, so dass

$$ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

2.) Ist $p > q$, (Fig. 74. 75.)

so ist $ax.xd > bx.xc$

$$\begin{aligned} \text{folglich } ax.xd &= bx.xc + (ab - cd)(dx - de) \\ &= bx.xc + (ab - cd)ex \end{aligned}$$

$$\text{mithin } bx.xc + (ab - cd)ex : bx.xc = p : q$$

$$\text{also } (ab - cd)ex : bx.xc = p - q : q.$$

Da nun $ab - cd$, e , b , c , $p - q : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufgabe IV. Fall 3. reducirt.

Determination.

Vermöge Buch 1. Aufg. IV. Fall 3. Determ. muss

$$\begin{aligned}
 \text{seyn } p-q:q &= ab-cd : be+ec+2\sqrt{be \cdot ec} \\
 &= \frac{(ab-cd)(be+ec-2\sqrt{be \cdot ec})}{(be+ec+2\sqrt{be \cdot ec})(be+ec-2\sqrt{be \cdot ec})} \\
 &= \frac{(ab-cd)be + (ab-cd)ec}{(be+ec)^2 - 4be \cdot ec} \\
 &= \frac{(ab-cd)be + (ab-cd)ec}{(be-ec)^2 + 4bc^2}
 \end{aligned}$$

Es soll aber der Punkt e so bestimmt werden, dafs $(ab-cd) : dc = bd : de$, folglich ist sowohl

$$\begin{aligned}
 ab-cd : ab &= bd : bd+de, \text{ als auch } ab-cd : dc = ac : cd+de \\
 &= bd : be \qquad \qquad \qquad = ac : ce
 \end{aligned}$$

also sowohl

$$(ab-cd)be = ab \cdot bd, \text{ als auch } (ab-cd)ce = ac \cdot cd$$

Mithin mufs seyn

$$\begin{aligned}
 p-q:q &= ab \cdot bd + ac \cdot cd - 2\sqrt{ab \cdot bd \cdot ac \cdot cd} : bc^2 \\
 &= ab \cdot bd + ab \cdot cd + \left\{ \begin{array}{l} bc \cdot cd \\ bc \cdot bd - bc^2 \end{array} \right\} - 2\sqrt{ab \cdot bd \cdot ac \cdot cd} : bc^2
 \end{aligned}$$

$$\text{folglich auch } p:q = ac \cdot bd + ab \cdot cd - 2\sqrt{ab \cdot bd \cdot ac \cdot cd} : bc^2$$

$$= (\sqrt{ac \cdot bd} - \sqrt{ab \cdot cd})^2 : bc^2$$

Anmerkung.

$$\text{Es ist } (\sqrt{ac \cdot bd} - \sqrt{ab \cdot cd})\sqrt{(ac \cdot bd + \sqrt{ab \cdot cd})}$$

$$= ac \cdot bd \left\{ \begin{array}{l} -ab \cdot cd \\ -ab \cdot bd + ab \cdot bc \end{array} \right.$$

$$= cb \cdot bd + ab \cdot bc$$

$$= ad \cdot bc$$

$$\text{folglich } \sqrt{ac \cdot bd} - \sqrt{ab \cdot cd} : bc = ad : \sqrt{ac \cdot bd} + \sqrt{ab \cdot cd}$$

folglich muß auch seyn $p : q = ad^2 : \sqrt{ac \cdot bd} + \sqrt{ab \cdot cd}$,
welches die Simsonsche Determination ist.

Construction.

Man mache $abf = R = adm$, $fb = ba$, $md = dc$,
ziehe fm , welche der verlängerten bd in e begegne,
nehme $ah = cd$, $bhp = R = hbq$, $hp = p$, $bq = q$, ziehe
 pq , welche die verlängerte hb in k schneide, mache
 $bkl = R = bcg$, $kl = kc$, $cg = ce$, und beschreibe über
 gl als Durchmesser einen Kreis, welcher der ver-
längerten bd in dem gesuchten Punkte x begegnen
wird.

Beweis.

Es ist $ab \} > \{ cd$
 $bf \} \{ dm$, also begegnet die Verlängerung
von fm der verlängerten bd , und es ist

$$\left. \begin{array}{l} bf : dm \\ ab : cd \end{array} \right\} = be : ed$$

$$\text{folglich } \frac{ab - cd : dc = be - ed : de}{= bd : de} \quad \text{also}$$

$$\frac{ab - cd : ab = bd : bd + de, \text{ u. } ab - cd : cd = ab - cd + bd : cd + de}{= bd : be \qquad \qquad \qquad = ac : ce}$$

mithin ist $(ab - cd)be = ab \cdot bd$, und $(ab - cd)ce = ac \cdot cd$.

Ferner ist $p \} > \{ q$
 $hp \} \{ bq$, also begegnet die Verlän-
gerung von pq der verlängerten hb , und es ist

$$\left. \begin{array}{l} hp : bq \\ p : q \end{array} \right\} = hk : kb$$

$$\text{also } p-q:q = h k - k b : b k \\ = \left\{ \begin{array}{l} h b \\ a b - c d \end{array} \right\} : b k$$

Ueberdies ist

$$p:q = (\sqrt{ac \cdot bd} - \sqrt{ab \cdot cd})^2 : bc^2 \text{ (Determin.)}$$

$$= \frac{ac \cdot bd + ab \cdot cd - 2\sqrt{ac \cdot bd \cdot ab \cdot cd}}{bc^2}, \text{ folglich}$$

$$p-q:q = \frac{ac \cdot bd + ab \cdot cd - bc^2 - 2\sqrt{ac \cdot bd \cdot ab \cdot cd}}{bc^2}$$

$$= \frac{ab \cdot bd + \left\{ \begin{array}{l} cb \cdot bd - bc^2 \\ bc \cdot cd \end{array} \right\} + ab \cdot cd - 2\sqrt{ab \cdot bd \cdot ac \cdot cd}}{bc^2}$$

$$= \frac{ab \cdot bd + ac \cdot cd - 2\sqrt{ab \cdot bd \cdot ac \cdot cd}}{bc^2}$$

$$= \frac{(ab-cd)be + (ab-cd)ce - 2\sqrt{(ab-cd)be \cdot (ab-cd)ce}}{bc^2}$$

$$= \frac{(ab-cd)(be+ec-2\sqrt{be \cdot ec})}{bc^2}$$

$$= \frac{(ab-cd) \left\{ \begin{array}{l} (be-ec)^2 \\ (be+ec)^2 - 4 \cdot be \cdot ec \\ (be+ec+2\sqrt{be \cdot ec})(be+ec-2\sqrt{be \cdot ec}) \end{array} \right\}}{bc^2}$$

$$= \frac{(ab-cd)(be+ec-2\sqrt{be \cdot ec})}{bc^2}$$

Mithin berührt (Fig. 74), oder schneidet (Fig. 75), den über gl als Durchmesser beschriebene Kreis die verlängerte be in einem Punkte x so, daß

$$(ab-cd)ex : bx \cdot xc = p-q : q. \text{ (Buch 1. Aufg. IV. Fall 3.)}$$

$$\text{also auch } (ab-cd)ex + bx \cdot xc : bx \cdot xc = p : q.$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } (ab-cd)ex &= (ab-cd)dx - (ab-cd)de \\ &= ab \cdot dx - cd \cdot dx - bd \cdot dc \\ &= ab \cdot dx - cd \cdot bx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{folglich ist } (ab-cd)ex + bx.xc &= ab.dx + bx.xc - cd.bx \\ &= ab.dx + bx.xd \\ &= ax.xd\end{aligned}$$

also auch $ax.xd : bx.xc = p : q$.

Zus. 1. (Sims.) Der in Fig. 74. angegebene Berührungspunkt x bestimmt ein grösseres Verhältniss, als jeder andere Punkt der verlängerten ad . Für ihn ist $bx^2 : cx^2 = ab.bd : ac.cd$. Alle ihm auf derselben Seite näher liegenden Punkte bestimmen grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Für den zweiten Durchschnitt y des Kreises mit der verlängerten ae (Fig. 75) läst sich, wie für den Punkt x , beweisen, dafs

$$ay.yd : by.yc = p : q.$$

Zus. 3. Es ist also $ax.xd : bx.xc = ay.yd : by.yc$

$$\text{folglich } ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

Und es läst sich, wenn auf einer geraden Linie fünf Punkte a, b, c, d, y gegeben sind, und $ab > cd$, auch $ay.yd > bx.xc$ ist, ein sechster x auf der verlängerten ad finden, so dafs

$$ax.xd : ay.yd = bx.xc : by.yc.$$

Der Bücher

de sectione determinata

Drittes.

Des ROBERT SIMSON

ERSTES BUCH

de sectione determinata.

Aufgabe I. (Fig. 76—83.)

Auf einer geraden Linie, in welcher zwey Punkte a, b gegeben sind, einen dritten Punkt x zu finden, so daß das Verhältniß von dem Unterschiede, oder der Summe des Quadrates des Segmentes zwischen x und einem der gegebenen Punkte und des Quadrates einer gegebenen geraden Linie d zu dem Quadrate des Segmentes zwischen x und dem andern Punkte einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 76. 77. 78.)

Der Punkt x soll zwischen a, b gefunden werden,
 a) so daß $ax^2 - d^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 76.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax^2 - d^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man $ae = d = af$, so ist $ax^2 - ae^2 : bx^2 = p : q.$

$$\left. \begin{array}{l} (ax + ae)(ax - ae) \\ fx \cdot xe \end{array} \right\}$$

Da nun $e, f, b, p : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. V. Fall 1. reducirt.

b.) dafs $ax^2 + d^2 : bx^2 = p : q.$ (Fig. 77.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax^2 + d^2 : bx^2 = p : q.$$

Man gedenke sich $be = bf$ so bestimmt, dafs $p : q = d^2 : \left\{ \begin{array}{l} be^2 \\ bf^2 \end{array} \right.$

$$\text{so ist } ax^2 + d^2 : bx^2 = d^2 : be^2$$

folglich auch $ax^2 : \left\{ \begin{array}{l} bx^2 - be^2 \\ (bx + be)(bx - be) \\ ex \cdot xf \end{array} \right\} = d^2 : be^2$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = p : q.$$

Da nun $a, f, e, p : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. V. Fall 1. reducirt.

c.) dafs $d^2 - ax^2 : bx^2 = p : q.$ (Fig. 78.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d^2 - ax^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man $ae = d = af$, so ist $ae^2 - ax^2 : bx^2 = p : q.$

$$\left. \begin{array}{l} (ae + ax)(ae - ax) \\ fx \cdot xe \end{array} \right\}$$

Da nun $f, e, b, p : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. V.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fall 3.} \\ \text{Fall 2.} \end{array} \right\}$ reducirt, je

nachdem der Punkt e $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{in der Verlängerung von } ab \\ \text{in } b \end{array} \right\}$
liegt.

Fall 2. (Fig. 78 $1/2$. 79. 80.)

Der Punkt x soll auf der Verlängerung von ab gefunden werden,

a.) dafs $ax^2 - d^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 78 $1/2$.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax^2 - d^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man $ae = d = af$, so wird $ax^2 - ae^2 : bx^2 = p : q$.
 $\left\{ \begin{array}{l} (ax + ae)(ax - ae) \\ fx \cdot xe \end{array} \right\}$

Da $f, e, b, p : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe
auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. VI. } \left\{ \begin{array}{l} \text{Fall 1.} \\ \text{Fall 3.} \end{array} \right\} \text{ reducirt, je} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\}$

nachdem der Punkt e $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{in der Verlängerung von } ab \\ \text{in } b \end{array} \right\}$

liegt.

b.) dafs $ax^2 + d^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 79.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax^2 + d^2 : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich be, bf so bestimmt, dafs

$$p : q = d^2 : be^2, \text{ so ist } ax^2 + d^2 : bx^2 = d^2 : be^2$$

$$\text{also auch } ax^2 : \left\{ \begin{array}{l} bx^2 - be^2 \\ (bx + be)(bx - be) \\ fx \cdot xe \end{array} \right\} = d^2 : be^2 = p : q.$$

Da $a, f, e, p : q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe

auf { Buch 1. Aufg. VI. { Fall 2. } zurück geführt,
 { Fall 3. }
 Dat. 8.

je nachdem der Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{in der Verlängerung von } a b \\ \text{in } a \end{array} \right\}$ liegt.

c.) dass $d^2 - ax^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 80.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d^2 - ax^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man $ae = af = d$, so wird $ae^2 - ax^2 \} : bx^2 = p : q.$
 $fx \cdot xe \}$

Da $f, e, b, p:q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf Buch 1. Aufg. V. Fall 2. reducirt.

Fall 3. (Fig. 81. 82. 83.)

Der Punkt x soll auf der Verlängerung von ab gefunden werden,

a.) dass $bx^2 - d^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 81.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$bx^2 - d^2 : ax^2 = p : q.$$

Macht man $be=bf=d$, so wird $\left. \begin{array}{l} bx^2-be^2 \\ fx \cdot xe \end{array} \right\} : ax^2 = p : q.$

Da $f, e, a, p:q$ gegeben sind, so ist dieser Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. VI.} \\ \text{Fall 2.} \\ \text{Fall 3.} \end{array} \right\}$ zurückgeführt,
Dat. 8.

je nachdem der Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{in der Verlängerung von } ab \\ \text{in } a \end{array} \right\}$ liegt.

b.) dass $b x^2 + d^2 : a x^2 = p : q$. (Fig. 82.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$bx^2 + d^2 : ax^2 = p : q.$$

Bestimmt man $ae = af$ so, daß $p : q = d^2 : ae^2$, so wird $bx + d^2 : ax^2 = d^2 : ae^2$

$$\text{also auch } bx^2 : \left\{ \begin{array}{l} ax^2 - ae^2 \\ fx \cdot xe \end{array} \right\} = p : q.$$

Da b, f, e, p : q gegeben sind, so ist dieser Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch. 1. Aufg. VI. } \left\{ \begin{array}{l} \text{Fall 1.} \\ \text{Fall 3.} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$ zurückgeführt,

Dat. 8.

je nachdem der Punkt e $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen a, b} \\ \text{in der Verlängerung von ab} \\ \text{in b} \end{array} \right\}$

liegt.

c.) daß $d^2 - bx^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 83.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d^2 - bx^2 : ax^2 = p : q.$$

Macht man $be = d = bf$, so wird $bf^2 - bx^2 : ax^2 = p : q$
 $fx \cdot xe$

Da f, e, a, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. V. } \left\{ \begin{array}{l} \text{Fall 3.} \\ \text{Fall 2.} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$ zurückgeführt, je

Dat. 8.

nachdem der Punkt e $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen a, b} \\ \text{auf der Verlängerung von ba} \\ \text{in a} \end{array} \right\}$

liegt.

A u f g a b e II. (Fig. 84—92.)

Auf einer geraden Linie, in welcher zwey Punkte a, b gegeben sind, einen dritten x zu finden, so daß das Verhältniss des Unterschiedes, oder der Summe des Rechteckes aus einer gegebenen geraden Linie d in das Segment zwischen x und einem jener Punkte und des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e zu dem Quadrat des Segmentes zwischen x und dem anderen Punkte einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 84. 85. 86.)

Der Punkt x soll zwischen a, b liegen,

a.) so daß $d \cdot ax - e^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 84.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d \cdot ax - e^2 : bx^2 = p : q.$$

Macht man $d \cdot ag = e^2$, so ist $d \cdot ax - d \cdot ag \} : bx^2 = p : q$.
 $d \cdot gx$

Da $d, g, b, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf Buch 1. Aufg. II. Fall 1. zurückgeführt.

b.) daß $d \cdot ax + e^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 85.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d \cdot ax + e^2 : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$d \cdot af = e^2, \text{ so ist } d \cdot ax + d \cdot af \} : bx^2 = p : q.$$

$$d \cdot fx$$

Da $d, f, b, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf Buch 1. Aufg. II. Fall 1. zurückgeführt.

c.) daß $e^2 - d \cdot ax : bx^2 = p : q$. (Fig. 86.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - d \cdot ax : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$\left. \begin{array}{l} d \cdot af = e^2, \text{ so ist } d \cdot af - d \cdot ax \\ d \cdot fx \end{array} \right\} : bx^2 = p : q.$$

Da $d, f, b, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf { Buch. 1. Aufg. II. Fall 2. $\left\{ \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\}$ zurückgeführt, Dat 2.

je nachdem der Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{in der Verlängerung von } ab \\ \text{in } b \end{array} \right\}$

liegt.

Fall 2. (Fig. 87. 88. 89.)

Der Punkt x soll auf der Verlängerung von ab liegen,

a.) so daß $d \cdot bx - e^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 87.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d \cdot bx - e^2 : ax^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$\left. \begin{array}{l} d \cdot bf = e^2, \text{ so ist } d \cdot bx - d \cdot bf \\ d \cdot fx \end{array} \right\} : ax^2 = p : q.$$

Da $d, f, a, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. Aufg. II. Fall 2. a. zurückgeführt.

b) daß $d \cdot bx^2 + e^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 88.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d \cdot bx + e^2 : ax^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$d \cdot bf = e^2, \text{ so ist } \left. \begin{array}{l} d \cdot bx + d \cdot bf \\ d \cdot fx \end{array} \right\} : ax^2 = p : q.$$

Da d, f, a, p : q gegeben sind, so ist der Fall
auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 1. A. II. F. 2. } \left\{ \begin{array}{l} a. \\ b. \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 2.} \end{array} \right\}$ zurückgeführt, je nach-

dem der Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen a, b} \\ \text{in der Verlängerung von ab} \\ \text{in a} \end{array} \right\}$ liegt.

e.) daß $e^2 - d \cdot bx : ax^2 = p : q.$ (Fig. 89)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - d \cdot bx : ax^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$d \cdot bf = e^2, \text{ so ist } \left. \begin{array}{l} d \cdot bf - d \cdot bx \\ d \cdot fx \end{array} \right\} : ax^2 = p : q.$$

Da d, f, a, p : q gegeben sind, so ist der Fall
auf B. 1. A. II. F. 1. zurückgeführt.

Fall. 3. (Fig. 90. 91. 92.)

Der Punkt x soll auf der Verlängerung von ab liegen,

a.) so daß $d \cdot ax - e^2 : bx^2 = p : q.$ (Fig. 90.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d \cdot ax - e^2 : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$d \cdot af = e^2, \text{ so ist } \left. \begin{array}{l} d \cdot ax - d \cdot af \\ d \cdot fx \end{array} \right\} : bx^2 = p : q.$$

Da $d, f, b, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left. \begin{array}{l} \text{B. 1. Aufg. II. F. 2. } \left\{ \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 2. } \left\{ \begin{array}{l} \text{in der Verlängerung von } ab \\ \text{zwischen } a, b \\ \text{in } b \end{array} \right\} \end{array} \right\}$ zurückgeführt, je nach-
dem der Punkt f $\left. \begin{array}{l} \text{in der Verlängerung von } ab \\ \text{zwischen } a, b \\ \text{in } b \end{array} \right\}$ liegt.

b) dafs $d \cdot ax + e^2 : bx^2 = p : q$. (fig. 91.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d \cdot ax + e^2 : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$$\left. \begin{array}{l} d \cdot af = e^2, \text{ so ist } d \cdot ax + d \cdot af \\ d \cdot fx \end{array} \right\} : bx^2 = p : q.$$

Da $d, f, b, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. II. F. 2. b. zurückgeführt.

c) dafs $e^2 - d \cdot ax : bx^2 = p : q$. (Fig. 92.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - d \cdot ax : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$$\left. \begin{array}{l} d \cdot af = e^2, \text{ so ist } d \cdot af - d \cdot ax \\ d \cdot fx \end{array} \right\} : bx^2 = p : q.$$

Da $d, f, b, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. II. F. 1. zurückgeführt.

Aufgabe III. (Fig. 93—101.)

Zwischen dem mittleren und einem der äusseren von drey auf einer geraden Linie gegebenen Punkten a, b, c , einen vierten x zu finden, so dafs das Verhältnifs von dem Unterschiede, oder der Summe des Rechtecks aus einer gegebenen geraden Linie d und

dem Segmente zwischen x und einem jener Punkte und des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e zu dem Rechteck aus den Segmenten zwischen x und den beiden anderen Punkten einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 93. 94. 95).

Der Punkt x soll zwischen a, b angegeben werden,

a) dafs d. $ax - e^2 : bx \cdot xc = p : q$. (fig. 93.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d. ax - e^2 : bx \cdot xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$$\left. \begin{array}{l} d. af = e^2, \text{ so ist } d. ax - d. af \\ d. fx \end{array} \right\} : bx \cdot xc = p : q.$$

Da $d, f, b, c, p : q$ gegeben sind, so ist dieser Fall auf B. 1. A. III. F. 1. reducirt.

b) dafs d. $ax + e^2 : bx \cdot xc = p : q$. (fig. 94.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d. ax + e^2 : bc \cdot xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$$\left. \begin{array}{l} d. af = e^2, \text{ so ist } d. ax + d. af \\ d. fx \end{array} \right\} : bc \cdot xc = p : q.$$

Da $d, f, b, c, p : q$ gegeben sind, so ist auch dieser Fall auf B. 1. A. III. F. 1. reducirt.

c) dafs $e^2 - d. ac : bc \cdot xc = p : q$. (fig. 95.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - d. ax : bc \cdot xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$$\left. \begin{array}{l} d. af = e^2, \text{ so ist } d. af - d. ax \\ d. fx \end{array} \right\} : bc \cdot xc = p : q.$$

Da nun $d, f, b, c, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. IV. zurückgeführt, wenn der

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 1. A. IV.} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 3.} \\ \text{F. 2.} \\ \text{F. 1.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 2.} \\ \text{Dat. 2.} \end{array} \right\}$$

Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } \left\{ \begin{array}{l} a, b \\ b, c \end{array} \right\} \\ \text{in der Verlängerung von } ac. \\ \text{in } b \\ \text{in } c \end{array} \right\}$ liegt.

Fall 2. (Fig. 96. 97. 98.)

Der Punkt x soll zwischen a, b gefunden werden,
b) dafs $d.bx - e^2 : ax.xc = p : q$. (fig. 96.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs
 $d.bx - e^2 : ax.xc = p : q$.

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs
 $d.bf = e^2$, so ist $d.bx - d.bf : ax.xc = p : q$.
 $d.fx$

Da $d, a, f, c, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. III. F. 2. reducirt.

b) dafs $d.bx + e^2 : ax.xc = p : q$ (fig. 97.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs
 $d.bx + e^2 : ax.xc = p : q$.

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs
 $d.bf = e^2$, so ist $d.bx + d.bf : ax.xc = p : q$.
 $d.fx$

Da $d, a, f, c, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall
 auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 1. A. III. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 2.} \end{array} \right\}$ reducirt, wenn der

Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } b, c \\ \text{in der Verlängerung von } bc \\ \text{in } c \end{array} \right\}$ liegt.

c) daß $e^2 - d.bx : ax.xc = p:q$. (fig. 98.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - d.bx : ax.xc = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$d.bf = e^2, \text{ so: st } \left. \begin{array}{l} d.bf - d.bx \\ d.fx \end{array} \right\} : ax.xc = p:q.$$

Da $d, a, f, c, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall
 auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 1. A. III. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 2.} \end{array} \right\}$ reducirt, wenn der

Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{in der Verlängerung von } ba \\ \text{in } a \end{array} \right\}$ liegt.

Fall 3. (Fig. 99. 100. 101.)

Der Punkt x soll zwischen a, b gefunden werden,

a) daß $d.cx - e^2 : ax.xb = p:q$. (fig. 99.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d.cx - e^2 : ax.xb = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$d.cf = e^2, \text{ so ist } \left. \begin{array}{l} d.cx - d.cf \\ d.fx \end{array} \right\} : ax.xb = p:q.$$

Da nun $d, a, b, f, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 1. A. III. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 2.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem der

Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ - \quad b, c \\ \text{in } b \end{array} \right\}$ liegt.

b) dafs $d.cx + e^2 : ax.xb = p:q$. (fig. 100.)

Analysis,

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d.cx + e^2 : ax.xb = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$$\left. \begin{array}{l} d.cf = e^2, \text{ so ist } d.cx + d.cf \\ d.fx \end{array} \right\} : ax.xb = p:q.$$

Da $d, a, b, f, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. III. F. 3. zurückgeführt.

c) dafs $e^2 - d.cx : ax.xb = p:q$. (fig. 101.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - d.cx : ax.xb = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$$\left. \begin{array}{l} d.cf = e^2, \text{ so ist } d.cf - d.cx \\ d.fx \end{array} \right\} : ax.xb = p:q.$$

Da $d, a, f, b, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. III. } \left\{ \begin{array}{l} \text{Fall 2.} \\ \text{Fall 3.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 2.} \end{array} \right\}$ zurück geführt,

je nachdem der Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{in der Verlängerung von } a b \\ \text{in } a \end{array} \right\}$

liegt.

A u f g a b e IV. (Fig. 102—110.)

Auf der Verlängerung einer geraden Linie ac , in welcher drey Punkte a , b , c gegeben sind, einen vierten Punkt x zu finden, so daß das Verhältniß von dem Unterschiede, oder der Summe des Rechteckes aus einer gegebenen geraden Linie d in das Segment zwischen x und einem jener Punkte, und des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e zu dem Rechteck aus den Segmenten zwischen x und den übrigen Punkten einem gegebenen Verhältnisse $p:q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 102—104.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) daß $d \cdot ax - e^2 : bx \cdot xc = p : q$. (Fig. 102.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d \cdot ax - e^2 : bx \cdot xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$\left. \begin{array}{l} d \cdot af = e^2, \text{ so ist } d \cdot ax - d \cdot af \\ d \cdot fx \end{array} \right\} : bx \cdot xc = p : q.$$

Da nun d , f , b , c , $p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf

$\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 1. A. IV. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 1.} \\ \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 2.} \\ \text{Dat. 2.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem der

Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{— } b, c \\ \text{auf die Verlängerung von } ac \\ \text{in } b \\ \text{in } c \end{array} \right\}$ fällt.

b) dafs $d.ax + e^2 : bx.xc = p : q$. (Fig. 103.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d.ax + e^2 : bx.xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$$d.af = e^2, \text{ so ist } d.ax + d.af : bx.xc = p : q.$$

$$d.fx$$

Da d, f, b, c, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf Buch 1. Aufg. IV. Fall 1. reducirt.

c) dafs $e^2 - d.ax : bx.xc = p : q$. (Fig. 104.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - d.ax : bx.xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$$d.af = e^2, \text{ so ist } d.af - d.ax : bx.xc = p : q.$$

$$d.fx$$

Da d, b, c, f, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. III. F. 1. reducirt.

Fall 2. (Fig. 105—107.)

Der Punkt x soll so gefunden werden,

a) dafs $d.bx - e^2 : ax.xc = p : q$. (Fig. 105.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$d.bx - e^2 : ax.xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, dafs

$$d.bf = e^2, \text{ so ist } d.bx - d.bf : ax.xc = p : q.$$

$$d.fx$$

Da d, a, f, c, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf { Buch 1, Aufg. IV. { Fall 2. } reducirt, je

{ Fall 3. }

Dat. 2.

nachdem der Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } b, c \\ \text{in die Verlängerung von } bc \\ \text{in } c \end{array} \right\}$
fällt.

b.) daß $d.bx + e^2 : ax.xc = p : q$. (Fig. 106.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d.bx + e^2 : ax.xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$d.bf = e^2, \text{ so ist } \left. \begin{array}{l} d.bx + d.bf \\ d.fx \end{array} \right\} : ax.xc = p : q.$$

Da $d, f, a, c, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall
auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. IV.} \\ \text{Fall 2.} \\ \text{Fall 1.} \end{array} \right\}$ reducirt, je
Dat. 2.

nachdem der Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } a, b \\ \text{in die Verlängerung von } ba \\ \text{in } a \end{array} \right\}$
fällt.

c.) daß $e^2 - d.bx : ax.xc = p : q$. (Fig. 107.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - d.bx : ax.xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$d.bf = e^2, \text{ so ist } \left. \begin{array}{l} d.bf - d.bx \\ d.fx \end{array} \right\} : ax.xc = p : q.$$

Da $d, a, c, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall
auf B. 1. A. III. Fall 1. zurückgeführt.

Fall 3. (Fig. 108—110.)

Der Punkt x soll so gefunden werden,

a) daß $d.cx - e^2 : ax.xb = p : q$. (Fig. 108.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d.cx - e^2 : ax.xb = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$\left. \begin{array}{l} d.cf = e^2, \text{ so ist } d.cx - d.cf \\ d.fx \end{array} \right\} : ax.xb = p : q.$$

Da $d, a, b, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf Buch 1. Aufg. IV. Fall 3. zurückgeführt.

b.) daß $d.cx + e^2 : ax.xb = p : q.$ (Fig. 109.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$d.cx + e^2 : ax.xb = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$\left. \begin{array}{l} d.cf = e^2, \text{ so ist } d.cx + d.cf \\ d.fx \end{array} \right\} : ax.xb = p : q.$$

Da $d, f, a, b, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf

$$\left\{ \begin{array}{l} B. 1. A. IV. \left\{ \begin{array}{l} F. 3. \\ F. 2. \\ F. 1. \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 2.} \\ \text{Dat. 2.} \end{array} \right\}$$

reducirt, je nachdem der

Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } b, c \\ \text{— } b, a \\ \text{auf der Verlängerung von } ba \\ \text{in } b \\ \text{in } a \end{array} \right\}$ liegt.

c) daß $e^2 - d.cx : ax.xb = p : q.$ (Fig. 110.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - d.cx : ax.xb = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß

$$d.cf=e^2, \text{ so ist } \left. \begin{array}{l} d.cf-d.cx \\ d.fx \end{array} \right\} : ax.xb=p:q.$$

Da $d, a, b, f, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf Buch 1. Aufg. III. Fall 1. zurückgeführt.

Aufgabe V. (Fig. 111—121.)

III. Zwischen einem der äusseren und dem mittleren von drey auf einer geraden Linie gegebenen Punkten a, b, c einen vierten Punkt x zu finden, so daß das Verhältniß des Unterschiedes, oder der Summe des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen jener Punkte, und des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e zu dem Quadrate des Segmentes zwischen x und dem dritten Punkte einem gegebenen Verhältnisse $p:q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 111—115.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) daß $ax.xb-e^2:cx^2=p:q$ (Fig. 111.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax.xb-e^2:cx^2=p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von ab so bestimmt, daß $af.fb=e^2$, ab in o halbiert und $og=of$ gemacht, so ist $ax.xb-af.fb$ } : $cx^2=p:q$.

$$\left. \begin{array}{l} ox^2-ox^2-of^2+of^2 \\ fx.xg \end{array} \right\}$$

Da $g, f, c, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 1. reducirt.

b) daß $ax.xb+e^2:cx^2=p:q$ (Fig. 112. 113. 114.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax.xb+e^2:cx^2=p:q.$$

Ist nun α) $e^2 < \frac{1}{4}ab^2$ (Fig. 112), so gedenke man sich den Punkt f zwischen a, b so bestimmt, daß $af \cdot fb = e^2$, ab in o halbart und $og = of$ gemacht. Als-

dann ist $ax \cdot xb + af \cdot fb$ } : $cx^2 = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} ox^2 - ob^2 + ob^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\}$$

Da $f, g, c, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. i. reducirt.

Ist aber β) $e^2 = \frac{1}{4}ab^2$, (Fig. 113.) so ist, wenn ab in o halbart wird $e^2 = ob^2$

folglich $ax \cdot xb + e^2 = ax \cdot xb + ob^2$

also auch $ax \cdot xb + ob^2$ } : $cx^2 = p : q$
 ox^2

mithin der Fall auf B. 1. A. I. reducirt.

Ist endlich γ) $e^2 > \frac{1}{4}ab^2$ (Fig. 114), so sey der Punkt f so bestimmt, daß, wenn o der Halbirungspunkt von ab ist, $bo^2 + of^2 = e^2$. Alsdan ist $ax \cdot xb + bo^2$ } + $of^2 : cx^2 = p : q$.

ox^2

Da nun $o, f, c, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. I. F. 1. b. reducirt.

c) daß $e^2 - ax \cdot xb : cx^2 = p : q$. (Fig. 115.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - ax \cdot xb : cx^2 = p : q$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß $af \cdot fb = e^2$, ab in o halbart und $go = of$ gemacht, so ist

$$af \cdot fb - ax \cdot xb$$

$$of^2 - ox^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da $f, g, c, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. V.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fall 3.} \\ \text{Fall 2.} \end{array} \right\} \text{reducirt, je nach-}$

dem der Punkt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } b, c \\ \text{auf der Verlängerung von } bc \\ \text{in } c \end{array} \right\}$ liegt.

Fall 2. (Fig. 116—118.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden

a) dafs $ax \cdot xc - e^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 116.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc - e^2 : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f zwischen a, c so bestimmt, dafs $af \cdot fc = e^2$, (welches immer geschehen kann, da $e^2 < \frac{1}{4}ac^2$ seyn mufs, damit $ax \cdot xc > e^2$ werden könne), ac in o halbt und $go = of$ gemacht, so ist $ax \cdot xc - af \cdot fc$ $\left\{ \begin{array}{l} of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : bx^2 = p : q$.

Da nun $f, g, b, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 1. A. V.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem der

Punkt b $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } f, g \\ \text{— } a, g \\ \text{in } g \end{array} \right\}$ liegt.

b) dafs $ax \cdot xc + e^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 117.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc + e^2 : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von ac so bestimmt, dafs $af \cdot fc = e^2$, ac in o halbt

und $go=of$ gemacht, so ist $ax.xc + af.fc \left. \begin{array}{l} of^2 - ox^2 \\ fx.xg \end{array} \right\} : bx^2 = p:q.$

Da $g, b, f, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 2. reducirt.

c) dafs $e^2 - ax.xc : bx^2 = p:q.$ (Fig. 118.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - ax.xc : bx^2 = p:q.$$

Ist nun $\alpha) e^2 < \frac{1}{4}ac^2$, so gedenke man sich den Punkt f zwischen a, c so bestimmt, dafs $af.fc = e^2$, welches geschehen kann, ac in o halbt und $go=of$ gemacht. Alsdann ist $af.fc - ax.xc \left. \begin{array}{l} ox^2 - of^2 \\ fx.xg \end{array} \right\} : bx^2 = p:q.$

Da $f, g, b, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} B. 1. A. VI. \\ \left\{ \begin{array}{l} F. 1. \\ F. 3. \\ F. 2. \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} Dat. 8. \\ Dat. 8. \end{array} \right\} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem der

Punkt b $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } f, c \\ \text{--- } f, g \\ \text{--- } a, g \\ \text{in } f \\ \text{in } g \end{array} \right\}$ liegt.

Ist aber $\beta) e^2 = \frac{1}{4}ac^2$, so ist, wenn ac in o halbt wird, $oc^2 - ax.xc \left. \begin{array}{l} ox^2 \end{array} \right\} : bx^2 = p:q$, folglich, da $o, b, p:q$

gegeben sind, der Punkt x gegeben (B. 1. A. I.).

Ist endlich $\gamma) e^2 > \frac{1}{4}ac^2$, so sey, wenn ac in o halbt ist, der Punkt f so bestimmt, dafs $e^2 = oc^2 + of^2$,

Alsdann ist $oc^2 + of^2 - ax \cdot xc : bx^2 \left. \vphantom{\begin{matrix} oc^2 + of^2 - ax \cdot xc \\ ox^2 + of^2 : bx^2 \end{matrix}} \right\} = p : q$, mithin der

Fall auf B. 3. A. I. F. 2. b. reducirt.

Fall 3. (Fig. 119. 120. 121.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) dafs $bx \cdot xc - e^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 119.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$bx \cdot xc - e^2 : ax^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f zwischen b, c so bestimmt, dafs $bf \cdot fc = e^2$, (welches geschehen kann, da $e^2 < \frac{1}{4}bc^2$ seyn muß, damit $bx \cdot xc > e^2$ werden könne), bc in o halbt und $go = of$ gemacht, so ist

$$\left. \begin{array}{l} bx \cdot xc - bf \cdot fc \\ of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : ax^2 = p : q.$$

Da $a, g, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 3. zurückgeführt.

Zusatz. (Simson) Sollte zwischen den Punkten b, c ein dritter x gefunden werden, so dafs

$$bx \cdot xc - e^2 : bx^2 = p : q,$$

so würde, wenn man den Punkt f so bestimmte, dafs $bf \cdot fc = e^2$, bc in o halbirte und $go = of$ machte, werden

$$\left. \begin{array}{l} bx \cdot xc - bf \cdot fc \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : bx^2 = p : q.$$

Da nun $b, g, f, p : q$ gegeben sind, so wäre auch diese Aufgabe auf B. 1. A. V. F. 3. reducirt.

b) dafs $bx \cdot xc + e^2 : ax^2 = p : q$. (Fig. 120.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$bx \cdot xc + e^2 : ax^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung

von bc so bestimmt, dass $bf \cdot fc = e^2$, bc in o halbt und $go = of$ gemacht, so ist $bx \cdot xc + bf \cdot fc$ } : $ax^2 = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} oc^2 \cdot ox^2 + of^2 - oc^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} \text{folglich}$$

Da $f, g, a, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf Buch 1. Aufg. V. { Fall 3. } reducirt, je { Fall 2. }

nachdem der Punkt a { in der Verlängerung von bg } { zwischen b, g } { in g }

liegt.

Zusatz. (Sims.) Soll zwischen den Punkten b, c ein dritter x gefunden werden, so dass

$$bx \cdot xc + e^2 : bx^2 = p : q,$$

so ist, wenn die Punkte f, o bestimmt werden, wie vorhin, und $go = of$ gemacht wird, $fx \cdot xg : bx^2 = p : q$, folglich auch diese Aufgabe auf B. 1. A. V. F. 2. reducirt.

c) dass $e^2 - bx \cdot xc : ax^2 = p : q$. (Fig. 121).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dass

$$e^2 - bx \cdot xc : ax^2 = p : q.$$

Ist nun $\alpha) e^2 < \frac{1}{4}bc^2$, so gedenke man sich den Punkt f zwischen b, c so bestimmt, dass $bf \cdot fc = e^2$, welches geschehen kann, bc in o halbt und $fo = of$ gemacht. Alsdann ist $bf \cdot fc - bx \cdot xc$ } : $ax^2 = p : q$,

$$ox^2 - of^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da $a, g, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI, F. 2. reducirt.

Ist aber $\beta)$ $e^2 = \frac{1}{4}bc^2$, so ist $oc^2 - bx \cdot xc \left. \vphantom{oc^2 - bx \cdot xc} \right\} : ax^2 = p : q$,
 ox^2

folglich, da o, a gegeben sind, der Fall auf B. 1. A. I. reducirt.

Ist endlich $\gamma)$ $e^2 > \frac{1}{4}bc^2$, so sey $e^2 = oc^2 + of^2$, und es
 ist also $oc^2 + of^2 - bx \cdot xc \left. \vphantom{oc^2 + of^2 - bx \cdot xc} \right\} : ax^2 = p : q$.
 $ox^2 + of^2$

Da $o, a, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. I. F. 2. b. reducirt.

Aufgabe VI. (Fig. 122—130.)

Auf der Verlängerung einer geraden Linie ac , in welcher drey Punkte a, b, c , gegeben sind, einen vierten x zu finden, so daß das Verhältniß der Summe, oder des Unterschiedes des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e und des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Quadrate des Segmentes zwischen x und dem dritten Punkte einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 122. 123. 124.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,
 a) daß $ax \cdot xb - e^2 : cx^2 = p : q$. (Fig. 122).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax \cdot xb - e^2 : cx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f so bestimmt, daß $af \cdot fb = e^2$, ab in o halbt und $go = ob$ gemacht,

so ist $ax \cdot xb - af \cdot fb \left. \vphantom{ax \cdot xb - af \cdot fb} \right\} : cx^2 = p : q$.

$$ox^2 - fo^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da $g, f, c, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 1. A. VI. } \{ \text{F. 1.} \} \\ \{ \text{F. 2.} \} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem
 Dat. 8.

$bf \left\{ \begin{array}{l} < \\ > \\ = \end{array} \right\} bc$ ist,

Ist endlich c) $bf > bc$, so ist, da $g, c, f, p:q$ gegeben sind, der Fall auf B. 1. A. VI. F. 3. zurückgeführt.

Zus. (Sims.) Sollte auf der Verlängerung einer geraden Linie, in welcher zwey Punkte a, b gegeben sind, ein dritter Punkt x bestimmt werden, so daß $ax \cdot xb - e^2 : bx^2 = p : q$, so würde man den Punkt f so bestimmen, daß $af \cdot fb = e^2$, und also erhalten

$$\left. \begin{array}{l} ax \cdot xb - af \cdot fb \\ ox^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : bx^2 = p : q.$$

Da nun $g, b, f, p:q$ gegeben sind, so wäre auch diese Aufgabe auf B. 1. A. VI. F. 3. zurückgeführt.

b) daß $ax \cdot xb + e^2 : cx^2 = p : q$. (Fig. 123.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax \cdot xb + e^2 : cx^2 = p : q.$$

Ist nun $\alpha) e^2 < \frac{1}{4}ab^2$, so gedenke man sich den Punkt f zwischen a, b so bestimmt, daß $af \cdot fb = e^2$, welches geschehen kann, ab in o halbir, und $go = of$ gemacht. Alsdann ist $ax \cdot xb + af \cdot fb$

$$\left. \begin{array}{l} ox^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : cx^2 = p : q.$$

Da $g, f, c, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 1. zurückgeführt.

Ist aber $\beta) e^2 = \frac{1}{4}ab^2$, so ist $ax, xb + ob^2 \} : cx^2 = p:q.$
 ox^2

Da $o, c, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. I. zurückgeführt.

Ist endlich $\gamma) e^2 > \frac{1}{4}ab^2$, so sey $e^2 = bo^2 + of^2$, und es ist $ax, xb + ob^2 + of^2 \} : cx^2 = p:q.$
 $ox^2 + of^2$

Da $o, c, f, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. I. F. 2. b. zurückgeführt.

c) dafs $e^2 - ax \cdot xb : cx^2 = p:q$. (Fig. 124).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - ax \cdot xb : cx^2 = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von ab so bestimmt, dafs $af \cdot fb = e^2$, ab in o halbt und $go = of$ gemacht, so ist

$$\left. \begin{array}{l} af \cdot fb - ax \cdot xb \\ of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : cx^2 = p:q.$$

Da $g, c, f, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 2. zurückgeführt.

Fall 2. (Fig. 125. 126. 127).

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) dafs $bx \cdot xc - e^2 : ax^2 = p:q$. (Fig. 125).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$bx \cdot xc - e^2 : ax^2 = p:q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von bc so bestimmt, dafs $bf \cdot fc = e^2$, bc in o halbt

und $go=of$ gemacht, so ist $bx.xc - bf.fc \left\{ \begin{array}{l} : ax^2=p:q. \\ ox^2-of^2 \\ fx . xg \end{array} \right.$

Da $a, g, f, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 2. zurückgeführt, je

$\left\{ \begin{array}{l} F. 2. \\ F. 3. \end{array} \right\}$ nachdem $bg \left\{ \begin{array}{l} < \\ > \\ = \end{array} \right\} ba$ ist. Dat. 8.

b) dafs $bx.xc+e^2:ax^2=p:q$. (Fig. 126).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$bx.xc+e^2:ax^2=p:q.$$

Ist nun $\alpha) e^2 < \frac{1}{4}bc^2$, so gedenke man sich zwischen b,c den Punkt f so bestimmt, dafs $bf.fc=e^2$, bc in o halbird, und $go=of$ gemacht. Alsdann ist

$$\left. \begin{array}{l} bx.xc + bf.fc \\ ox^2 - of^2 \\ fx . xg \end{array} \right\} : ax^2 = p:q.$$

Da $a, g, f, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 2. zurückgeführt.

Ist aber $\beta) e^2 = \frac{1}{4}bc^2$, so ist $bx.xc+oc^2 \left\{ \begin{array}{l} : ax^2=p:q. \\ ox^2 \end{array} \right.$

Da $o, a, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. I. zurückgeführt.

Ist endlich $\gamma) e^2 > \frac{1}{4}bc^2$, so sey $e^2=oc^2+of^2$, und es ist $bx.xc+oc^2+of^2 \left\{ \begin{array}{l} : ax^2=p:q. \\ ox^2+of^2 \end{array} \right.$

Da $a, o, f, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. I. F. 2. b. zurückgeführt.

c) dafs $e^2-bx.xc:ax^2=p:q$. (Fig. 127.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - bx \cdot xc : ax^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von bc den Punkt f so bestimmt, dafs $bf \cdot fc = e^2$, bc in o halbt, $go = of$ gemacht, so ist $bf \cdot fc - bx \cdot xc$ { : $ax^2 = p : q$.

$$of^2 - ox^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da f, g, a , gegeben sind, so ist der Fall auf

{ B. 1. A. V. { F. 3. } zurückgeführt, je nachdem
 { F. 2. }
 Dat. 8. }

og { < } oa ist,
 { > }
 { = }

Fall 3. (Fig. 128. 129. 130.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) dafs $ax \cdot xc - e^2 : bx^2 = p : q$. (Fig. 128.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc - e^2 : bx^2 = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ac den Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fc = e^2$, ac in o halbt und $go = of$ gemacht, so ist $ax \cdot xc - af \cdot fc$ { : $bx^2 = p : q$.

$$ox^2 - of^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da $g, b, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 3. zurückgeführt.

Zusatz. (Sims.) Wenn auf der Verlängerung von ac , in welcher zwey Punkte a, c gegeben sind, ein dritter x bestimmt werden sollte, so dafs

$$ax \cdot xc - e^2 : ax^2 = p : q,$$

so würde man nach der Bestimmung von f, o, g ,

wie vorhin, gleichfalls haben $fx \cdot xg : ax^2 = p : q$, und die Aufgabe, wie den vorigen Fall, auf B. 1. A. VI F. 3. zurückführen können.

b) dafs $ax \cdot xc + e^2 : bx^2 = p : q$ (Fig. 129.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc + e^2 : bx^2 = p : q.$$

Ist nun $\alpha) e^2 < \frac{1}{4}ac^2$, so gedenke man sich den Punkt f zwischen a, c so bestimmt, dafs $af = e^2$, ac in o halbt und $go = of$ gemacht. Alsdann ist

$$ax \cdot xc + af \cdot fc : bx^2 = p : q.$$

$$\left. \begin{array}{l} ox^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\}$$

Da $g, b, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} B. 1. A. VI. \\ \left\{ \begin{array}{l} F. 3. \\ F. 1. \\ F. 2. \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} Dat. 8. \\ Dat. 8. \end{array} \right\} \end{array} \right\}$ zurückgeführt, je nach-

$$\left. \begin{array}{l} dem \ ab \\ \left\{ \begin{array}{l} > ag < a \\ > af \\ < ag \\ = af \\ = ag \end{array} \right\} \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

Ist aber $\beta) e^2 = \frac{1}{4}ac^2$, so ist $ax \cdot xc + oc^2 : bx^2 = p : q$.

also der Fall auf B. 1. A. I. zurückgeführt.

Ist endlich $\gamma) e^2 > \frac{1}{4}ac^2$, so sey $e^2 = oc^2 + of^2$, und es ist $ax \cdot xc + oc^2 + of^2 : bx^2 = p : q$,

also der Fall auf B. 3. A. I. $\left\{ \begin{array}{l} F. 2. b. \\ F. 3. b. \end{array} \right\}$ zurückge-

führt, je nachdem $ab \begin{cases} > \\ < \end{cases} ao$ ist, wie vorher, gleich, wie die Aufgabe, wie vorher.

c) daß $e^2 - ax \cdot xc : bx^2 = p : q$. (Fig. 130.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - ax \cdot xc : bx^2 = p : q$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von ac so bestimmt, daß $af \cdot fc = e^2$, ac in o halbt, und $go = of$ gemacht, so ist $af \cdot fc - ax \cdot xc : bx^2 = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} of^2 - ox^2 \\ ax \cdot xc = p : q \end{array} \right\}$$

Da nun $g, b, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 2. zurückgeführt.

Der Bücher

de sectione determinata

Viertes.

Dr. Richter

de sectione determinata

Victoria

Des ROBERT SIMSON

ZWEITES BUCH

de sectione determinata.

Aufgabe I. (Fig. 131—139.)

Zwischen den beiden mittleren von vier auf einer geraden Linie gegebenen Punkten a, b, c, d , einen fünften x zu finden, so daß der Unterschied oder die Summe des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e und des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Rechteck aus den Segmenten zwischen x und den beiden übrigen Punkten einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 131. 132. 133.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) daß $ax \cdot xb - e^2 : cx \cdot xd = p : q$. (fig. 131.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax \cdot xb - e^2 : cx \cdot xd = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f auf der Verlängerung von ab so bestimmt, daß $af \cdot fb = e^2$, ab in o halbt,

und $go=of$ gemacht, so ist $ax.xb - af.fb$ } : $cx.xd = p:q$
 $ox^2 - of^2$
 $fx.xg$

Da $g, f, c, d, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. I. F. 1. reducirt.

b) dafs $ax.xb + e^2 : cx.xd = p:q$. (Fig. 132.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax.xb + e^2 : cx.xd = p:q.$$

Ist nun $\alpha) e^2 < \frac{1}{4}ab^2$, so gedenke man sich zwischen a, b den Punkt f so bestimmt, dafs $af.fb = e^2$, ab in o halbirt und $go=of$ gemacht. Alsdann ist

$$ax.xb + af.fb \} : cx.xd = p:q.$$

$$ox^2 - of^2$$

$$fx.xg$$

Da $f, g, c, d, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. I. F. 1. reducirt.

Ist aber $\beta) e^2 = \frac{1}{4}ab^2$, so ist $ax.xb + ob^2$ } : $cx.xd = p:q$.
 ox^2

Da $o, c, d, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. V. F. 1. reducirt.

Ist endlich $\gamma) e^2 > \frac{1}{4}ab^2$, so sey $e^2 = ob^2 + of^2$, und es ist $ax.xb + ob^2 + of^2$ } : $cx.xd = p:q$. Bestimmt man
 $ox^2 + of^2$

die gerade Linie h so, dafs $of^2 : h^2 = p:q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2 und 60.) und es ist

$$ox^2 : cx.xd - h^2 = p:q. \text{ (El. V. 5.)}$$

Da $o, c, d, h, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. V. F. 1. reducirt.

c) dafs $e^2 - ax.xb : cx.xd = p:q$. (Fig. 133.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ab den Punkt f so bestimmt, daß $af \cdot fb = e^2$, ab in o halbt und $go = of$ gemacht, so ist $af \cdot fb - ax \cdot xb$ } : $cx \cdot xd = p : q$,

$$of^2 - ox^2 =$$

$$fx \cdot xg$$

Da $f, g, c, d, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. { F. 3. } reducirt, je nachdem

F. 2.

F. 1.

Dat. 8.

Dat. 8.

$$\left. \begin{array}{l} bf < bc \\ > bc \text{ und } < bd \\ > bd \\ = bc \\ = bd \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

Fall 2. (Fig. 134. 135. 136.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) daß $ax \cdot xc - e^2 : bx \cdot xd = p : q$. (Fig. 134.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax \cdot xc - e^2 : bx \cdot xd = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f zwischen a, c so bestimmt, daß $af \cdot fc = e^2$, welches muß geschehen können, damit $ax \cdot xc > e^2$ werden könne, ac in o halbt und $go = of$ gemacht, so ist $ax \cdot xc - af \cdot fc$ } : $bx \cdot xd = p : q$.

$$of^2 - ox^2 =$$

$$fx \cdot xg$$

Da $g, b, d, f, p:q$ gegeben sind, so ist die Aufgabe
 auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch 2. Aufg. I. } \left\{ \begin{array}{l} \text{Fall 2.} \\ \text{Fall 3.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\}$ reducirt, je
 nachdem $ab \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \\ = \end{array} \right\} ac$ ist.

b) dafs $ax \cdot xc + e^2 : bx \cdot xd = p : q$. (Fig. 135.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc + e^2 : bx \cdot xd = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ac den
 Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fc = e^2$, ac in o halbirt
 und $go = of$ gemacht, so ist

$$\left. \begin{array}{l} ax \cdot xc + af \cdot fc \\ of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : bx \cdot xd = p : q.$$

Da $g, b, f, d, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall
 auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 2. A. I. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem
 $cf \left\{ \begin{array}{l} < \\ > \\ = \end{array} \right\} cd$ ist.

c) dafs $e^2 - ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q$. (Fig. 136.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q.$$

Ist $\alpha) e^2 < \frac{1}{4}ac^2$, so gedenke man sich den Punkt f
 zwischen a, c so bestimmt, dafs $af \cdot fc = e^2$, ac in o
 halbirt und $go = of$ gemacht. Alsdann ist

$$\left. \begin{array}{l} af \cdot fc - ax \cdot xc \\ ox^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : bx \cdot xd = p : q.$$

Da $f, g, b, d, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} B. 2. A. II. \\ \left\{ \begin{array}{l} F. 3. \\ F. 2. \\ F. 1. \end{array} \right\} \\ Dat. 8. \\ Dat. 8. \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

$$ab \left\{ \begin{array}{l} > af \\ < af \text{ und } > ag \\ < ag \\ = af \\ = ag \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

Ist aber $\beta) e^2 = \frac{1}{4}ac^2$, so ist, wenn ac in o halbir ist, $\left. \begin{array}{l} oc^2 - ax \cdot xc \\ ox^2 \end{array} \right\} : bx \cdot xd = p : q.$

Da $o, b, d, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} Buch 1. Anf. V. \\ \left\{ \begin{array}{l} Fall 3. \\ Fall 2. \end{array} \right\} \\ Dat. 8. \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

$$ab \left\{ \begin{array}{l} > ao \\ < ao \\ = ao \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

Ist endlich $\gamma) e^2 > \frac{1}{4}ac^2$, so sey $e^2 = oc^2 + of^2$, wenn o der Halbirungspunkt von ac ist. Alsdann ist $\left. \begin{array}{l} o + c^2 of^2 - ax \cdot xc \\ ox^2 + of^2 \end{array} \right\} : bx \cdot xd = p : q.$ Bestimmt man die

gerade Linie h so, daß $of^2 : h^2 = p : q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2. und 60.) und es ist $ox^2 : bx \cdot xd - h^2 = p : q.$ (El. V. 5.)

Da $o, b, d, h, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall

auf B. 3. A. V. $\left\{ \begin{array}{l} \text{F. 3. a.} \\ \text{F. 3. a. Zus.} \\ \text{F. 2. a.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

$$\text{ab} \left\{ \begin{array}{l} > \text{ao} \\ = \text{ao} \\ < \text{ao} \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

Fall 3. (Fig. 137. 138. 139.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden

a) dafs $ax \cdot xd - e^2 : bx \cdot xc = p : q$. (Fig. 137.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xd - e^2 : bx \cdot xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f zwischen a, d so bestimmt, dafs $af \cdot fd = e^2$, welches mufs geschehen können, damit $ax \cdot xd > e^2$ werden könne, ad in o halbirte, und $go = of$ genommen, so ist $ax \cdot xd - af \cdot fd : bx \cdot xc = p : q$.

$$of^2 - ox^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da f, g, b, c, p : q gegeben sind, so ist der Fall

auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 2. A. I.} \\ \text{B. 2. A. I.} \\ \text{B. 2. A. I.} \\ \text{B. 2. A. I.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 3.} \\ \text{F. 2.} \\ \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

Dat. 8.

Dat. 8.

Dat. 8.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \end{array} \right\}$

Dat. 8.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ab} > \text{ag} \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} \text{ac} < \text{af} \\ \text{ac} > \text{af} \\ \text{ac} = \text{af} \end{array} \right\} \\ \text{ab} = \text{ag} \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} \text{ac} < \text{af} \\ \text{ac} > \text{af} \end{array} \right\} \\ \text{ab} < \text{ag} \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} \text{ac} < \text{af} \\ \text{ac} > \text{af} \\ \text{ac} = \text{af} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$ ist. Für $\text{ab} = \text{ag}$ und

$\text{ac} = \text{af}$ ist die Aufgabe unbestimmt, oder unmöglich.

b) dafs $ax \cdot xd + e^2 : bx \cdot xc = p : q$. (Fig. 138.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xd + e^2 : bx \cdot xc = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fd = e^2$, ad in o halbt und $go = of$ gemacht, so ist $ax \cdot xd + af \cdot fd$: $bx \cdot xc = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\}$$

Da $g, b, c, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. I. Fall 3. reducirt.

c) dafs $e^2 - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q$. (Fig. 139.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q.$$

Ist $\alpha) e^2 < \frac{1}{4}ad^2$, so sey der Punkt f zwischen a, d so bestimmt, dafs $af \cdot fd = e^2$, ad in o halbt und $go = of$ gemacht. Alsdann ist $af \cdot fd - ax \cdot xd$: $bx \cdot xc = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} ox^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\}$$

Da $f, g, b, c, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. { F. 3. } reducirt, je nachdem

{ F. 2. }
 { Dat. 8. }
 { Dat. 8. }
 { B. 2. A. II. F. 1. }

ab $> af$ ist,

{ $< af$ und $> ag$ }
 { $= af$ }
 { $= ag$ }
 { $< ag$ }

Ist aber $\beta)$ $e^2 = \frac{1}{4}ad^2$, so ist $od^2 - ax \cdot xd \Big|_{ox_2} : bx \cdot xc = p : q$.

Da $o, b, c, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch 1. Aufg. V.} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Fall 3.} \\ \text{Fall 2.} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$ reducirt, je

Dat. 8.
nachdem $ab \left\{ \begin{array}{l} > ao \\ < ao \\ = ao \end{array} \right\}$ ist.

Ist endlich $\gamma)$ $e^2 > \frac{1}{4}ad^2$, so sey der Punkt f so bestimmt, dafs $e^2 = od^2 + of^2$, und es ist also

$od^2 + of^2 - ax \cdot xd \Big|_{ox^2 + of^2} : bx \cdot xc = p : q$. Es sey die ge-

rade Linie h so bestimmt, dafs $of^2 : h^2 = p : q$ so ist h eine gegebene gerade Linie (Dat. 2.) und man hat (El. V. 5.) $ox^2 : bx \cdot xc - h^2 = p : q$.

Da $o, b, c, h, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. V. $\left\{ \begin{array}{l} \text{F. 3. a.} \\ \text{F. 2. a.} \\ \text{F. 3. a. Zus.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

$ab \left\{ \begin{array}{l} > ao \\ < ao \\ = ao \end{array} \right\}$ ist.

Aufgabe II. (Fig. 140—148.)

Zwischen einem der äusseren und dem nächstliegenden mittleren von vier auf einer geraden Linie gegebenen Punkten a, b, c, d , einen fünften Punkt x zu finden, so dafs das Verhältnifs des Unterschiedes oder der Summe des Quadrates einer gegebenen geraden Linie und des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen der gegebenen Punkte zu dem Rechteck aus den Segmenten zwischen x und den

übrigen Punkten einem gegebenen Verhältnisse $p:q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 140. 141. 142.)

Der Punkt x soll so zwischen a, b gefunden werden,

a) dafs $ax \cdot xd - e^2 : bx \cdot xc = p : q$. (Fig. 140.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xd - e^2 : bx \cdot xc = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f zwischen a, d so bestimmt, dafs $af \cdot fd = e^2$, welches mufs geschehen können, damit $ax \cdot xd > e^2$ werden könne, ad in e halbird und $go = of$ gemacht, so ist

$$ax \cdot xd - af \cdot fd : bx \cdot xc = p : q.$$

$$of^2 - ox^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da $f, g, b, c, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall

auf $B. 2. A. II. \left\{ \begin{array}{l} F. 3. \\ F. 2. \\ F. 1. \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

Dat. 8.

Dat. 8.

$$\left\{ \begin{array}{l} ab > af \\ ab < af \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} ac > af \\ ac < af \\ ac = af \end{array} \right\} \\ ab = af \end{array} \right\} \text{ ist,}$$

b) dafs $ax \cdot xd + e^2 : bx \cdot xc = p : q$. (Fig. 141.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xd + e^2 : bx \cdot xc = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt f so bestimmt, daß $af \cdot fd = e^2$, ad in o hal-
birt und $go = of$ gemacht, so ist

$$\left. \begin{array}{l} ax \cdot xd + af \cdot fd \\ of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : bx \cdot xc = p : q.$$

Da g, b, c, f, p:q gegeben sind, so ist der Fall
auf Buch 2. Aufg. II. Fall 1. reducirt.

c) daß $e^2 - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q$. (Fig. 142.)

A n a l y s i s.

- Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q.$$

Ist α) $e^2 < \frac{1}{4}ad^2$, so gedenke man sich zwischen a, d
den Punkt f so bestimmt, daß $af \cdot fd = e^2$, welches ge-
schehen kann, ad in o halbirt und $go = of$ gemacht.

Alsdann ist $af \cdot fd - ax \cdot xd$ } : $bx \cdot xc = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} ox^2 - of_2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\}$$

Da f, g, b, c, p:q gegeben sind, so ist der Fall
auf B. 2. A. I. F. 1. oder B. 2. A. III. F. 1. redu-

$$\left\{ \begin{array}{l} B. 2. A. III. \left\{ \begin{array}{l} F. 2. \\ F. 3. \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \\ B. 2. A. III. \left\{ \begin{array}{l} F. 3. \\ F. 2. \\ F. 1. \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\}$$

$$\text{cirt, je nachdem ab } \left. \begin{array}{l} > af \\ < af \text{ und } > ag, \text{ aber } ac \left\{ \begin{array}{l} > af \\ < af \\ = af \end{array} \right\} \\ = af \\ = ag \text{ und } ac \left\{ \begin{array}{l} > af \\ < af \end{array} \right\} \\ < ag \text{ und } ac \left\{ \begin{array}{l} > af \\ < af, \text{ aber } > ag \\ < ag \\ = ag \end{array} \right\} \\ = af \end{array} \right\}$$

ist. Wenn $ab=ag$ und $ac=af$, so ist die Aufgabe unmöglich oder unbestimmt.

Ist $\beta) e^2 = \frac{1}{4}ad^2$, so ist, wenn o der Halbirungspunkt von ad ist, $od^2 - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q$.

Da $o, b, c, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 1. A. VI. F. 1. oder B. 1. A. V. F. 1. redu-} \\ \text{B. 1. A. VI. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 3.} \\ \text{F. 2.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\}$

$$\text{cirt, je nachdem ab } \left. \begin{array}{l} > ao \\ < ao \text{ und } ac \left\{ \begin{array}{l} > ao \\ < ao \\ = ao \end{array} \right\} \\ = ao \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

Ist $\gamma) e_2 > \frac{1}{4}ad_2$, so sey f so bestimmt, daß $e_2 = od^2 + of_2$.

Alsdann ist $od^2 + of_2 - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q$.

Es sey die gerade Linie h so bestimmt, daß

$$of^2 : h^2 = p : q,$$

so ist h eine gegebene gerade Linie (Dat. 2. und 60.)

und es ist $ox^2 : bx \cdot xc - h^2 = p : q$. (El. V. 5.)

Da $o, b, c, h, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall

$$\text{auf } \left\{ \begin{array}{l} \text{B. 3. A. VI. F. 1. a. oder B. 3. A. V. F. 1. a.} \\ \text{B. 3. A. VI. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 3. a.} \\ \text{F. 2. a.} \\ \text{F. 3. a. Zus.} \\ \text{F. 1. a. Zus.} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$\text{reducirt, je nachdem ab } \left\{ \begin{array}{l} > ao \\ < ao \text{ und } ac \left\{ \begin{array}{l} > ao \\ < ao \\ = ao \end{array} \right\} \\ = ao \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

Fall 2. (Fig. 143. 144. 145).

Der Punkt x soll zwischen c, d so gefunden werden,

a) daß $ax \cdot xc - e^2 : bx \cdot xd = p : q$. (Fig. 143.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax \cdot xc - e^2 : bx \cdot xd = p : q.$$

Gedenkt man sich zwischen e, d den Punkt f so bestimmt, daß $af \cdot fc = e^2$, welches muß geschehen können, damit $ax \cdot xc > e^2$ werden könne, ac in o halbt und $go = of$ gemacht, so ist $ax \cdot xc - af \cdot fc : bx \cdot xd = p : q$,

$$\left. \begin{array}{l} ox^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\}$$

Da $g, d, b, f, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. F. 2. reducirt.

b) daß $ax \cdot xc + e^2 : bx \cdot xd = p : q$. (Fig. 144.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax \cdot xc + e^2 : bx \cdot xd = p : q,$$

Ist $\alpha)$ $e^2 < \frac{1}{4}ac^2$, so gedenke man sich zwischen a, c den Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fc = e^2$, welches geschehen kann, ac in o halbird und $go = oc$ gemacht. Alsdann ist $ax \cdot xc - af \cdot fc \} : bx \cdot xd = p : q.$

$$\left. \begin{array}{l} ox^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\}$$

Da $f, g, b, d, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} B. 2. A. II. \\ \left\{ \begin{array}{l} F. 3. \\ F. 2. \\ F. 1. \end{array} \right\} \\ Dat. 8. \\ Dat. 8. \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

$$ab \left\{ \begin{array}{l} > af \\ < af \\ < ag \\ = af \\ = ag \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

Ist $\beta)$ $e^2 = \frac{1}{4}ac^2$, so ist, wenn ac in o halbird ist, $ax \cdot xc + oc^2 \} : bx \cdot xd = p : q.$

$$ox^2$$

Da $o, b, d, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} Buch 1, Aufg. V. \\ \left\{ \begin{array}{l} Fall 3. \\ Fall 2. \end{array} \right\} \\ Dat. 8. \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

$$nachdem ab \left\{ \begin{array}{l} > ao \\ < ao \\ = ao \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

Ist $\gamma)$ $e^2 > \frac{1}{4}ac^2$, so sey, wenn o der Halbirungspunkt von ac ist, der Punkt f so bestimmt, dafs

$$e^2 = oc^2 + of^2.$$

Und es ist $ax \cdot xc + oc^2 + of^2 \} : bx \cdot xd = p : q.$ Es sey $ox^2 + of^2$

die gerade Linie h so bestimmt, dafs $of^2 : h^2 = p : q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2. und 60.) und es ist $ox^2 : bx \cdot xd - h^2 = p : q$ (El. V. 5.).

Da $o, b, d, h, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. V. $\left\{ \begin{array}{l} \text{F. 1. a.} \\ \text{F. 2. a.} \\ \text{F. 3. a. Zus.} \end{array} \right\}$ reducirt, je

nachdem $ab \left\{ \begin{array}{l} > ao \\ < ao \\ = ao \end{array} \right\}$ ist.

e) dafs $e^2 - ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q$. (Fig. 145.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs $e^2 - ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q$.

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ac den Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fc = e^2$, ac in o halbt, $go = of$ gemacht, so ist $af \cdot fc - ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\}$$

Da $f, g, b, d, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch 2. Aufg. 1.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fall 3.} \\ \text{Fall 2.} \end{array} \right\}$ reducirt, je

nachdem $cf \left\{ \begin{array}{l} > cd \\ < cd \\ = cd \end{array} \right\}$ ist.

Fall 3. (Fig. 146. 147. 148.)

Der Punkt x soll zwischen c, d gesucht werden,

a) dafs $ax \cdot xb - e^2 : cx \cdot xd = p : q$. (Fig. 146.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs $ax \cdot xb - e^2 : cx \cdot xd = p : q$.

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von ab so bestimmt, dafs $af \cdot fb = e^2$, ab in o halbt

und $go=of$ gemacht, so ist $ax \cdot xb - af \cdot fb : cx \cdot xd = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} ox^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\}$$

Da $f, g, c, d, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall
 auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 2. A. II. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

$bf \left\{ \begin{array}{l} > bc \\ < c \\ = bc \end{array} \right\}$ ist.

b) dafs $ax \cdot xb + e^2 : cx \cdot xd = p : q$. (Fig. 147.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xb + e^2 : cx \cdot xd = p : q.$$

Ist nun $\alpha) e^2 < \frac{1}{4}ab^2$, so gedenke man sich zwischen a, b den Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fb = e^2$, welches geschehen kann, ab in o halbirt, und $go=of$ gemacht, so ist $ax \cdot xb + af \cdot fb : cx \cdot xd = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} ox^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\}$$

Da $g, f, c, d, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall
 auf B. 2. A. II. F. 3. reducirt.

Ist aber $\beta) e^2 = \frac{1}{4}ab^2$, so ist, wenn o der Halbirungspunkt von ab ist, $ax \cdot xb + ob^2 : cx \cdot xd = p : q$.

$$\left. \begin{array}{l} ox^2 \end{array} \right\}$$

Da $o, c, d, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall
 auf B. 1. A. V. F. 3. reducirt.

Ist endlich $\gamma) e^2 > \frac{1}{4}ab^2$, so sey $e^2 = ob^2 + of^2$, wenn o der Halbirungspunkt von ab ist. Alsdann ist

$$\left. \begin{array}{l} ax \cdot xb + ob^2 + of^2 \\ ox^2 + of^2 \end{array} \right\} : cx \cdot xd = p : q. \quad \text{Es sey die}$$

gerade Linie h so bestimmt, daß $of^2 : h^2 = p : q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2. und 60.) und es ist $ox^2 : cx \cdot xd - h^2 = p : q$. (El. V. 5.)

Da $o, c, d, h, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. VI. F. 3. a. reducirt.

c) daß $e^2 - ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q$. (Fig. 148.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - ax \cdot xb : cx \cdot xd = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ab den Punkt f so bestimmt, daß $af \cdot fb = e^2$, ab in o halbt

und $go = of$ gemacht, so ist $af \cdot fb - ax \cdot xb \left. \begin{array}{l} of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : cx \cdot xd = p : q.$

Da $f, g, c, d, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf

$\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 2. A. I. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 3.} \\ \text{F. 2.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

$bf \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \\ = \end{array} \right\} bd \text{ ist.}$

Aufgabe III. (Fig. 149—157.)

Auf der Verlängerung einer geraden Linie ad , in welcher vier Punkte a, b, c, d , gegeben sind, einen fünften Punkt x zu finden, so daß das Verhältniß des Unterschiedes, oder der Summe des Quadrates einer gegebenen geraden Linie e und des Rechteckes aus den Segmenten zwischen x und zweyen jener Punkte zu dem Rechteck aus den Segmenten zwischen x und den übrigen Punkten einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Fall 1. (Fig. 149. 150. 151.)

Der Punkt x soll so gefunden werden,

a) dafs $ax \cdot xb - e^2 : cx \cdot xd = p : q$. (Fig. 149.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xb - e^2 : cx \cdot xd = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ab den Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fb = e^2$, ab in o halbt, und $go = of$ gemacht, so ist $ax \cdot xb - af \cdot fb$

$$\left. \begin{array}{l} ox^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : cx \cdot xd = p : q.$$

Da f, g, c, d, p : q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. III. F. 1. reducirt, je nachdem

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 2. A. III.} \\ \text{F. 1.} \\ \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} bf < bc \\ > bc \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} < bd \\ > bd \\ = bd \end{array} \right\} \\ = bc \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

b) dafs $ax \cdot xb + e^2 : cx \cdot xd = p : q$. (Fig. 150.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xb + e^2 : cx \cdot xd = p : q.$$

Ist nun $\alpha) e^2 < \frac{1}{4}ab^2$, so gedenke man sich zwischen a, b den Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fb = e^2$, ab in o halbt und $go = of$ gemacht. Alsdann ist

$$\left\{ \begin{array}{l} ax \cdot xb + af \cdot fb \\ ox^2 - of^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : cx \cdot xd = p : q.$$

Da $g, f, c, d, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. III. F. 1. reducirt.

Ist aber $\beta) e^2 = \frac{1}{4}ab^2$, so ist $ax \cdot xb + ob^2 \} : cx \cdot xd = p:q,$
 ox^2

wenn o der Halbirungspunkt von ab ist.

Da $o, c, d, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 1. A. VI. F. 2. reducirt.

Ist endlich $\gamma) e^2 > \frac{1}{4}ab^2$, so gedenke man sich den Punkt f so bestimmt, dafs, wenn o der Halbirungspunkt von ab ist, $e^2 = bo^2 + of^2$. Alsdann ist

$ax \cdot xb + bo^2 + of^2 \} : cx \cdot xd = p:q.$ Es sey die ge-
 $ox^2 + of^2$

rade Linie h so bestimmt, dafs $of^2 : h^2 = p:q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2 und 60.) und es ist

$$ox^2 : cx \cdot xd - h^2 = p:q. \text{ (El. V. 5.)}$$

Da $o, c, d, h, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. VI. F. 2. reducirt.

c) dafs $e^2 - ax \cdot xb : cx \cdot xd = p:q.$ (Fig. 151.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$e^2 - ax \cdot xb : cx \cdot xd = p:q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fb = e^2$, welches mufs geschehen können, ab in o halbart und $go = of$ gemacht, so ist $af \cdot fb - ax \cdot xb \} : cx \cdot xd = p:q.$

$$of^2 - ox^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da $g, c, d, f, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. F. 1. reducirt.

Fall 2. (Fig. 152. 153. 154).

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) dafs $ax \cdot xc - e^2 : bx \cdot xd = p:q.$ (Fig. 152).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc - e^2 : bx \cdot xd = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ac den Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fc = e^2$, ac in o halbt und $go = of$ gemacht, so ist $ax \cdot xc - af \cdot fc$

$$ox^2 - of^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da $f, g, b, d, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf { Buch 2. Aufg. II. { Fall 3. } reducirt, je

{ Fall 2. }

Dat. 8.

nachdem cf { $>$ $<$ $=$ } cd ist.

b) dafs $ax \cdot xc + e^2 : bx \cdot xd = p : q$. (Fig. 153.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, dafs

$$ax \cdot xc + e^2 : bx \cdot xd = p : q.$$

Ist $a) e^2 < \frac{1}{4}ac^2$, so gedenke man sich den Punkt f so bestimmt, dafs $af \cdot fc = e^2$, ac in o halbt und $go = of$ gemacht. Alsdann ist

$$ax \cdot xc + af \cdot fc : bx \cdot xd = p : q.$$

$$ox^2 - of^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da $f, g, b, d, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf { B. 2. A. III. { F. 1. } reducirt, je nachdem

{ F. 2. }

{ F. 3. }

Dat. 8.

Dat. 8.

ab $\begin{cases} > af \\ < af \text{ und } \begin{cases} > ag \\ < ag \\ = ag \end{cases} \\ = af \end{cases}$ ist.

Ist $\beta)$ $e^2 = \frac{1}{4}ac^2$, so ist $\frac{ax \cdot xc + oc^2}{ox^2} : bx \cdot xd = p : q$,

wenn o der Halbirungspunkt von ac ist.

Da o, b, d, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Buch 1. Anfg. VI.} \\ \text{Fall 2.} \\ \text{Fall 3.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem
 Dat. 8.

ab $\begin{cases} > ao \\ < ao \\ = ao \end{cases}$ ist.

Ist $\gamma)$ $e^2 > \frac{1}{4}ac^2$, so sey, wenn o der Halbirungspunkt von ac ist, der Punkt f so bestimmt, dafs
 $e^2 = oc^2 + of^2$.

Alsdann ist $\frac{ax \cdot xc + oc^2 + of^2}{ox^2 + of^2} : bx \cdot xd = p : q$. Die gerade

Linie h sey so bestimmt, dafs $of^2 : h^2 = p : q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2, und 60.), und (El. V. 5.)
 $ox^2 : bx \cdot xd - h^2 = p : q$.

Da o, b, d, h, p:q gegeben sind, so ist der Fall auf B. 3. A. VI. $\left\{ \begin{array}{l} \text{F. 2. a.} \\ \text{F. 3. a.} \\ \text{F. 3. a. Zus.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

ab $\begin{cases} > \\ < \\ = \end{cases}$ ao ist.

c) dafs $e^2 - ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q$. (Fig. 154.).

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - ax \cdot xc : bx \cdot xd = p : q.$$

Gedenkt man sich den Punkt f in der Verlängerung von ad so bestimmt, daß $af \cdot fc = e^2$, welches muß geschehen können, ac in o halbt und $go = of$ gemacht, so ist

$$\left. \begin{array}{l} af \cdot fc - ax \cdot xc \\ of^2 - ox^2 \\ fx \cdot xg \end{array} \right\} : bx \cdot xd = p : q.$$

Da $g, b, d, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. Fall 3. reducirt.

Fall 3. (Fig. 155. 156. 157.)

Der Punkt x soll so bestimmt werden,

a) daß $ax \cdot xd - e^2 : bx \cdot xc = p : q$. (fig. 155.)

Analysis.

Der Punkt x sey so bestimmt, daß

$$ax \cdot xd - e^2 : bx \cdot xc = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt f so bestimmt, daß $af \cdot fd = e^2$, ad in o halbt, und $go = of$ gemacht, so ist $ax \cdot xd - af \cdot fd$ } : $bx \cdot xc = p : q$.

$$ox^2 - of^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da $g, b, c, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. III. F. 3. reducirt.

b) daß $ax \cdot xd + e^2 : bx \cdot xc = p : q$. (Fig. 156.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$ax \cdot xd + e^2 : bx \cdot xc = p : q.$$

Ist $\alpha)$ $e^2 < \frac{1}{4}ad^2$, so gedenke man sich zwischen a, d den Punkt f so bestimmt, daß $af \cdot fd = e^2$, welches geschehen kann, ad in o halbt und $go = of$ gemacht,

Da $o, b, c, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall
auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 1. A. VI. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 2.} \\ \text{F. 3.} \\ \text{F. 1.} \end{array} \right\} \\ \text{Dat. 8.} \\ \text{Dat. 8.} \end{array} \right\}$ reducirt, je nachdem

$$\left\{ \begin{array}{l} ab > ao \\ < ao \text{ und } ac \\ = ao \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} > ao \\ < ao \\ = ao \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

Ist $\gamma) b^2 > \frac{1}{4}ad^2$, so sey, wenn o der Halbirungspunkt von ad ist, $e^2 = od^2 + of^2$. Alsdann ist

$$\left. \begin{array}{l} ax \cdot xd + od^2 + of^2 \\ ox^2 + of^2 \end{array} \right\} : bx \cdot xc = p : q. \quad \text{Die gerade}$$

Linie h sey so bestimmt, dafs $of^2 : h^2 = p : q$, so ist h eine gegebene Linie (Dat. 2. und 60.), und (El. V. 5.) $ox^2 : bx \cdot xc - h^2 = p : q$.

Da $o, b, c, h, p:q$ gegeben sind, so ist der Fall
auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{B. 3. A. VI. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 2. a.} \\ \text{F. 3. a.} \\ \text{F. 1. a.} \end{array} \right\} \\ \text{B. 3. A. VI. } \left\{ \begin{array}{l} \text{F. 1. a. Zus.} \\ \text{F. 3. a. Zus.} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$ reducirt, je

$$\text{nachdem } ab \left\{ \begin{array}{l} > ao \\ < ao \text{ und } ac \\ = ao \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} > ao \\ = ao \\ < ao \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

c) dafs $e^2 - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q$. (Fig. 157.)

Analysis.

Der Punkt x sey so gefunden, daß

$$e^2 - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q.$$

Gedenkt man sich in der Verlängerung von ad den Punkt f so bestimmt, daß $af \cdot fd = e^2$, ad in o halbt, und $go = of$ gemacht, so ist $af \cdot fd - ax \cdot xd : bx \cdot xc = p : q.$

$$of^2 - ox^2$$

$$fx \cdot xg$$

Da $g, b, c, f, p : q$ gegeben sind, so ist der Fall auf B. 2. A. II. F. 1. reducirt.

Apollonius / Diesterweg, Wilhelm Adolf, / Simson, Robert

Die Bücher de fectione determinata

Mainz 1822

A.gr.b. 462

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10234699-0